ThS. LÊ ĐỨC

- Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi.
- Nâng cao kĩ năng và phương pháp giải các dạng bài tập

Các dạng Toán điển hình 7

- Số hữu tỉ - số thực
- Hàm số và đồ thị
- Thống kê
- Biểu thức đại số
- Đường thẳng vuông góc - đường thẳng song song
- Tam giác
- Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác
- Các đường đồng quy của tam giác

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. LÊ ĐỨC

• Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi.
• Nâng cao kĩ năng và phương pháp giải các dạng bài tập

Các dạng Toán điển hình 7

- Phép nhân và phép chia các đa thức
- Phân thức đại số
- Tứ giác
- Đa giác - diện tích đa giác

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
THANH HOA
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 7
Mã số: 1L-117ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên
Số xuất bản:89-2010/CXB/13-03/ ĐHQGHN
Quyết định xuất bản số: 117LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 7

Cuốn sách bao gồm 2 phần với 7 chương:

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I – SỐ HỮU TỈ, SỐ THỰC

Chương II – HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chương III – THỐNG KÊ

Chương IV – BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I – ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chương II – TAM GIÁC

Chương III – QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Ở mỗi chương chứa dựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:

A. ***Tóm tắt lí thuyết****: Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

B. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kĩ năng giải Toán.

C. ***Bài tập luyện tập***

D. ***Hướng dẫn – Đáp số***

Như vậy, ở mỗi bài:

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì ?*

2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*

3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*

4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được cuốn sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

- Trung tâm Sách giáo dục Anpha

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- Công ti Sách - thiết bị giáo dục ANPHA

50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: *alphabookcenter@yahoo.com*

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I – SỐ HỮU TỈ – SỐ THỰC

CHỦ ĐỀ 1

TẬP HỢP $\mathbb{Q}$ CÁC SỐ HỮU TỈ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. SỐ HỮU TỈ

Định nghĩa: *Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số* $\frac{a}{b}$ *với* $a, b \in \mathbb{Z}$ *và* $b \neq 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

☞ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ trong đó phép chia cho một số khác 0 luôn được thực hiện.
- Các phân số bằng nhau xác định cùng một số hữu tỉ và một trong số đó là một đại diện của số hữu tỉ.
- Mỗi số hữu tỉ được xác định bởi phân số đại diện và các phép toán trên số hữu tỉ đều được xác định trên các phép toán của phân số đại diện.

2. BIỂU DIỄN SỐ HỮU TỈ TRÊN TRỤC SỐ

Giả sử, cần biểu diễn số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chia đoạn thẳng đơn vị thành b phần bằng nhau. Lấy một đoạn làm đơn vị mới thì đơn vị mới bằng $\frac{1}{b}$ đơn vị cũ.

Bước 2: Biểu diễn a theo đơn vị mới.

☞ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Các điểm hữu tỉ dương nằm bên phải điểm 0, các điểm hữu tỉ âm nằm bên trái điểm 0.
- Giữa hai số hữu tỉ phân biệt bao giờ cũng có một số hữu tỉ khác chúng. Ta nói "***Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ có tính chất trù mật***".
- Phần nguyên của số hữu tỉ x (kí hiệu: [x]) là một số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tức là $[x] \le x < [x] + 1$.

3. SO SÁNH HAI SỐ HỮU TỈ

Với hai số bất kì $x, y \in \mathbb{Q}$, ta luôn viết được dưới dạng:

$$x = \frac{a}{m} \text{ và } y = \frac{b}{m} \text{ với } m > 0.$$

Từ đó, ta có:

- Nếu x = y thì a = b.

- Nếu $x < y$ thì $a < b$.
- Nếu $x > y$ thì $a > b$.

☞ ***Nhận xét***: Vậy, để so sánh hai số hữu tỉ x và y ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi hai số x và y về dạng hai phân số có cùng mẫu số dương.

Bước 2: Sử dụng nhận xét trên.

Bước 3: Kết luận.

4. **SỐ HỮU TỈ DƯƠNG, ÂM**

Cho $x \in \mathbb{Q}$, ta có:

- $x > 0 \Leftrightarrow x$ là số dương.
- $x < 0 \Leftrightarrow x$ là số âm.
- $x = 0$ thì x không là số âm cũng không là số dương.

Từ đó, ta rút ra một số tính chất sau:

Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$. Ta có:

Tính chất 1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 2. Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 3. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 4. $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 5. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b}$, với $b \neq 0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: BIỂU DIỄN SỐ HỮU TỈ

Ví dụ 1: *Nêu các bước để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ trên trục số.*

Từ đó, biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{5}{2}$ trên trục số đó.

✍ *Giải*

Ta thực hiện theo các bước:

a. Chia đoạn thẳng đơn vị thành hai phần bằng nhau, lấy một đoạn làm đơn vị mới.

Ta được:



b. Biểu diễn 3 theo đơn vị mới. Do đó, số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ được biểu diễn bằng điểm A nằm ở bên phải điểm 0 và cách điểm 0 một đoạn bằng 3 đơn vị mới.



Ví dụ 2: Viết 3 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó:

$$x_1 = -6 \;;\; x_2 = -\frac{7}{3} \;;\; x_3 = \frac{5}{12} \;;\; x_4 = -1{,}25 \;;\; x_5 = \frac{6}{4}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$x_1 = -6 = \frac{-6}{1} = \frac{-12}{2} = \frac{-24}{4} = \ldots = \frac{-6k}{k} \; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$x_2 = -\frac{7}{3} = \frac{-14}{6} = \frac{14}{-6} = \frac{-35}{15} = \ldots = \frac{-7k}{3k} \; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$x_3 = \frac{5}{12} = \frac{-5}{-12} = \frac{-10}{-24} = \frac{15}{36} = \ldots = \frac{5k}{12k} \; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$x_4 = -1{,}25 = \frac{-5}{4} = \frac{10}{-8} = \frac{-15}{12} = \ldots = \frac{-5k}{4k} \; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$x_5 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{-3}{-2} = \frac{12}{8} = \ldots = \frac{3k}{2k} \; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chỉ ra được dạng tổng quát của một số hữu tỉ x, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi x về dạng phân số tối giản, giả sử $x = \frac{m}{n}$.

Bước 2: Khi đó, dạng tổng quát của x là: $x = \frac{m.k}{n.k}$, với $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Vấn đề 2: SO SÁNH HAI SỐ HỮU TỈ

Ví dụ 1: *Sử dụng tính chất hãy xem các phân số sau đây có bằng nhau không ?*

a. $\frac{-5}{6}$ và $\frac{15}{-18}$. b. $\frac{12}{7}$ và $\frac{-47}{-28}$. c. $-\frac{17}{5}$ và $\frac{-5}{3}$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $\frac{15}{-18} = \frac{-15}{18} \Rightarrow \frac{-5}{6} = \frac{-15}{18}$ vì $(-5).18 = (-15).6 = -90$.

b. Ta có: $\frac{-47}{-28} = \frac{47}{28} \Rightarrow \frac{12}{7} < \frac{47}{28}$ vì $12.28 = 336 < 47.7 = 329$.

c. Ta có: $-\frac{17}{5} = \frac{-17}{5} \Rightarrow \frac{-5}{3} > \frac{-17}{5}$ vì $(-5).5 = -25 > (-17).3 = -51$.

☞ *Chú ý*: Trong câu b), nếu ta nhận xét rằng $\frac{12}{7} > \frac{-47}{-28}$ vì:

$12.(-28) = -336 < (-47).7 = -329$ là hoàn toàn sai.

Do vậy, khi so sánh hai phân số ta phải biến đổi phân số với mẫu số dương thì mới áp dụng được *Tính chất 1* và *Tính chất 2*.

Ví dụ 2: *Hãy so sánh hai số hữu tỉ:*

a. $-0,3$ *và* $\frac{-1}{5}$. b. $-0,6$ *và* $\frac{1}{-2}$.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta biến đổi hai số $-0,3$ và $\frac{-1}{5}$ về dạng phân số có cùng mẫu số:

$$-0,3 = \frac{-0,3.10}{10} = \frac{-3}{10},\ \frac{-1}{5} = \frac{-1.2}{2.5} = \frac{-2}{10}.$$

Tới đây, ta có nhận xét: $-3 < -2 \Leftrightarrow \frac{-3}{10} < \frac{-2}{10} \Leftrightarrow -0,3 < \frac{-1}{5}$.

b. Trước tiên, ta biến đổi hai số $-0,6$ và $\frac{1}{-2}$ về dạng phân số có cùng mẫu số:

$$-0,6 = \frac{-0,6.10}{10} = \frac{-6}{10},\ \frac{1}{-2} = \frac{1.(-5)}{(-2).(-5)} = \frac{-5}{10}.$$

Tới đây, ta có nhận xét: $-6 < -5 \Leftrightarrow \frac{-6}{10} < \frac{-5}{10} \Leftrightarrow -0,6 < \frac{1}{-2}$.

Ví dụ 3: (Bài 5/tr 8 – Sgk): *Cho* $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$, *biết* $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ *và* $x < y$. *Hãy chứng tỏ rằng* $x < \frac{a+b}{2m} < y$.

✍ *Giải*

Viết lại x, y dưới dạng có cùng mẫu số bằng 2m: $x = \frac{2a}{2m}$, $y = \frac{2b}{2m}$.

Từ giả thiết $x < y$ ta được: $\frac{a}{m} < \frac{b}{m} \Leftrightarrow a < b$. (1)

Khi đó:

- Cộng hai vế của (1) với a, ta được:

$$a + a < b + a \Leftrightarrow 2a < a + b \Rightarrow \frac{2a}{2m} < \frac{a+b}{2m} \Leftrightarrow x < \frac{a+b}{2m}. \quad (2)$$

- Cộng hai vế của (1) với b, ta được:

$$a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2m} < \frac{2b}{2m} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2m} < y \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: *Cho* $a, b \in \mathbb{Z}$ *và* $b > 0$. *So sánh hai số hữu tỉ:* $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$.

✍ *Giải*

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$ ta đi so sánh hai số a(b + 1) và b(a + 1).

Xét hiệu: a(b + 1) – b(a + 1) = ab + a – (ab + b) = a – b.

Ta có ba trường hợp, với điều kiện b > 0:

Trường hợp 1: Nếu a – b = 0 ⇔ a = b thì:

$$a(b+1) - b(a+1) = 0 \Leftrightarrow a(b+1) = b(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} = \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}.$$

Trường hợp 2: Nếu a – b < 0 ⇔ a < b thì:

$$a(b+1) - b(a+1) < 0 \Leftrightarrow a(b+1) < b(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} < \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}.$$

Trường hợp 3: Nếu a – b > 0 ⇔ a > b thì:

$$a(b+1) - b(a+1) > 0 \Leftrightarrow a(b+1) > b(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} > \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}.$$

☞ ***Nhận xét***: Với phương pháp được minh hoạ trong ví dụ trên chúng ta có thể đi thực hiện bài toán tổng quát hơn, cụ thể:

"*Cho* a, b, n ∈ $\mathbb{Z}$ *và* b, n > 0. *So sánh hai số hữu tỉ* $\frac{a}{b}$ *và* $\frac{a+n}{b+n}$".

Khi đó ta có lập luận tương tự như sau:

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+n}{b+n}$ ta đi so sánh hai số: a(b + n) và b(a + n).

Xét hiệu: a(b + n) – b(a + n) = ab + an – (ab + bn) = an – bn = n(a – b).

Ta có ba trường hợp, với điều kiện b, n > 0:

Trường hợp 1: Nếu n(a – b) = 0 ⇔ a = b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) = 0 \Leftrightarrow a(b+n) = b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} = \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+n}{b+n}.$$

Trường hợp 2: Nếu n(a – b) < 0 ⇔ a < b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) < 0 \Leftrightarrow a(b+n) < b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} < \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}.$$

Trường hợp 3: Nếu n(a – b) > 0 ⇔ a > b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) > 0 \Leftrightarrow a(b+n) > b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} > \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: So sánh các số hữu tỉ:

a. $\frac{-15}{16}$ và $\frac{5}{-8}$.

b. $\frac{13}{9}$ và $\frac{-16}{-3}$.

c. $-\frac{7}{3}$ và $\frac{-6}{5}$.

d. $\frac{2}{3}$ và $\frac{6}{7}$.

Bài 2: Sắp xếp các số hữu tỉ sau đây theo thứ tự tăng dần.

$$-0,25\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -0,5\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{13}{12}\ ;\ \frac{-5}{24}\ ;0\ ;\ \frac{1}{48}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{-9}{8}.$$

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi b > 0, ta có:

a. $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b.$

b. $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b.$

Bài 4: Viết 5 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó:

$$x_1 = -2,5\ ;\ x_2 = \frac{5}{6}\ ;\ x_3 = \frac{-7}{5},\ x_4 = -0,36\ ;\ x_5 = \frac{-9}{-25}\ ;\ x_6 = \frac{27}{6}.$$

Bài 5: Cho hai số hữu tỉ $x = \frac{2a+7}{5}$ và $y = \frac{3b-8}{-5}$.

Với giá trị nào của a, b thì:

a. x và y là số dương.

b. x và y là số âm.

c. x và y không là số dương và cũng không là số âm.

Bài 6: So sánh số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ với số 0, biết:

a. Hai số a, b cùng dấu.

b. Hai số a, b khác dấu.

Bài 7: Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, b > 0, so sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$.

Bài 8: Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết rằng x là số âm lớn nhất được viết bằng ba chữ số 1.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 2: Ta viết lại các số hữu tỉ dưới dạng:

$$-0,25 = \frac{-12}{48}\ ;\ \frac{1}{2} = \frac{24}{48}\ ;\ -0,5 = \frac{-24}{48}\ ;\ \frac{5}{6} = \frac{40}{48}\ ;$$

$$\frac{13}{12} = \frac{52}{48}\ ;\ \frac{-5}{24} = \frac{-10}{48}\ ;0 = \frac{0}{48}\ ;\ \frac{2}{3} = \frac{32}{48}\ ;\ \frac{-9}{8} = \frac{-54}{48}.$$

Ta được: $\frac{-54}{48} < \frac{-24}{48} < \frac{-12}{48} < \frac{-10}{48} < 0 < \frac{1}{48} < \frac{24}{48} < \frac{32}{48} < \frac{40}{48} < \frac{52}{48}.$

Vậy ta được một dãy số hữu tỉ sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

$$\frac{-9}{8}\ ;\ -0,5\ ;\ -0,25\ ;\ \frac{-5}{24}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{48}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{13}{12}.$$

Bài 3: *Hướng dẫn*: Xem lại phần chứng minh tính chất 1.

Bài 5:

a. x và y là số dương khi $a > \frac{-7}{2}$ và $b < \frac{8}{3}$.

b. x và y là số âm khi $a < \frac{-7}{2}$ và $b > \frac{8}{3}$.

c. x và y không là số dương và cũng không là số âm khi $a = \frac{-7}{2}$ và $b = \frac{8}{3}$.

Bài 6:

a. Với a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b} > 0$.

b. Với a, b khác dấu thì $\frac{a}{b} < 0$.

Bài 7: Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$ ta đi so sánh hai số:

$a(b + 2005)$ và $b(a + 2005)$

bằng cách xét hiệu:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) = ab + 2005a - (ab + 2005b) = 2005(a - b).$$

Ta có ba trường hợp, với điều kiện $b > 0$:

Trường hợp 1: Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) = 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) = b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} = \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+2005}{b+2005}.$$

Trường hợp 2: Nếu $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) < 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) < b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} < \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+2005}{b+2005}.$$

Trường hợp 3: Nếu $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) > 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) > b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} > \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+2005}{b+2005}.$$

CHỦ ĐỀ 2

CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ HỮU TỈ

Để cộng, trừ hai số hữu tỉ x, y ta làm như sau:

Bước 1: Viết x, y dưới dạng hai phân số có cùng mẫu số dương:

$$x = \frac{a}{m} \text{ và } y = \frac{b}{m}.$$

Bước 2: Thực hiện phép cộng, trừ:

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} \;;\quad x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

☛ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Hiệu của hai số hữu tỉ x và y là tổng của x với số đối của y.
- Phép cộng, trừ các số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện cho chúng. Vì vậy, khi cộng, trừ các số hữu tỉ có mẫu khác nhau, ta quy đồng mẫu rồi thực hiện phép cộng, trừ các số hữu tỉ có cùng mẫu: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.

  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$.
- Số đối của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $\frac{-a}{b}$ (hoặc $\frac{a}{-b}$).
- Phép cộng trong $\mathbb{Q}$ cũng có các tính chất cơ bản như phép cộng trong $\mathbb{Z}$, bao gồm: giao hoán, kết hợp, cộng với phần tử trung lập, cộng với số đối.
- Vì tổng, hiệu của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ nên từ một số hữu tỉ chúng ta có thể tách nó thành tổng hoặc hiệu của hai số hữu tỉ nào đó (suy luận ngược), điều này đặc biệt quan trọng khi thực hiện các phép tính tổng – *Trong phần phương pháp giải các dạng toán chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới ý tưởng này.*

2. QUY TẮC CHUYỂN VẾ

Khi chuyển vế một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

Với mọi x, y, z ∈ $\mathbb{Q}$ ta có: $x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$.

☛ ***Chú ý***: Trong $\mathbb{Q}$ ta cũng có những tổng đại số, trong đó ta cũng có thể đổi chỗ các số hạng, nhóm một số số hạng bằng các dấu ngoặc kèm theo quy tắc đổi dấu.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

Ví dụ 1: *Hãy thực hiện các phép tính:*

a. $\frac{3}{2}+\frac{2}{-3}$. b. $-2-\left(-\frac{3}{7}\right)$.

Giải

a. Ta có: $\frac{3}{2}+\frac{2}{-3}=\frac{3}{2}+\frac{-2}{3}=\frac{9}{6}+\frac{-4}{6}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$

hoặc có thể thực hiện theo cách: $\frac{3}{2}+\frac{2}{-3}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9}{6}-\frac{4}{6}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$.

b. Ta có: $-2-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{-14}{7}-\frac{-3}{7}=\frac{-14-(-3)}{7}=\frac{-11}{7}$

hoặc có thể thực hiện theo cách: $-2-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{-14}{7}+\frac{3}{7}=\frac{-14+3}{7}=\frac{-11}{7}$.

☞ ***Nhận xét:*** Khi đã thành thạo đôi chút, các em học sinh hãy thực hiện các phép toán trên theo cách 2, đó là "*Bỏ dấu ngoặc tồi thực hiện các phép cộng, trừ cho những phân số dương*".

Ví dụ 2: *Hãy thực hiện các phép tính:*

a. $0,6+\frac{4}{-3}$. b. $\frac{3}{7}-(-0,2)$.

Giải

a. Ta có: $0,6+\frac{4}{-3}=\frac{3}{5}-\frac{4}{3}=\frac{9}{15}-\frac{20}{15}=-\frac{11}{15}$.

b. Ta có: $\frac{3}{7}-(-0,2)=\frac{3}{7}+0,2=\frac{3}{7}+\frac{1}{5}=\frac{15}{35}+\frac{7}{35}=\frac{22}{35}$.

Ví dụ 3: *Tính giá trị của các biểu thức:*

a. $A=2\frac{3}{2}-3\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$. b. $B=5\frac{2}{7}-8\frac{1}{3}+\frac{1}{21}$.

Giải

a. Ta có: $A=2\frac{3}{2}-3\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{7}{2}-\frac{18}{5}+\frac{1}{4}$

$$=\frac{7.10-18.4+1.5}{20}=\frac{70-72+5}{20}=\frac{3}{20}.$$

b. Ta có: $B=5\frac{2}{7}-8\frac{1}{3}+\frac{1}{21}=\frac{37}{7}-\frac{25}{3}+\frac{1}{21}$

$$=\frac{37.3-25.7+1}{21}=\frac{111-175+1}{21}=\frac{-63}{21}=-3.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, các số hữu tỉ được cho dưới dạng *hỗn số*, chính vì vậy trước tiên chúng ta cần chuyển nó về dạng phân số, các em học sinh cần nhớ công thức đổi:

$$a\frac{b}{c} = \frac{a.c+b}{c} \text{ (hoặc } a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}\text{) với } a > 0.$$

Ví dụ 4: (Bài 10/tr 10 – Sgk): *Tính giá trị của biểu thức*:

$$A = \left(6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(5 + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(3 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right).$$

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta đi tính giá trị của các biểu thức trong ngoặc:

$$A = \frac{6.6 - 2.2 + 1.3}{6} - \frac{5.6 + 5.2 - 3.3}{6} - \frac{3.6 - 7.2 + 5.3}{6}$$

$$= \frac{35}{6} - \frac{31}{6} - \frac{19}{6} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}.$$

Cách 2: Bỏ dấu ngoặc rồi nhóm các số hạng tích hợp:

$$A = 6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 5 - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}$$

$$= (6 - 5 - 3) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Vấn đề 2: MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: (Bài 9.a, 9.b/tr 10 – Sgk): *Tìm* x, *biết*:

a. $x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$.   b. $x - \frac{2}{5} = \frac{5}{7}$.

✍ *Giải*

a. Theo quy tắc chuyển vế, ta có: $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3.3 - 1.4}{12} = \frac{5}{12}$.

Vậy, ta được $x = \frac{5}{12}$.

b. Theo quy tắc chuyển vế, ta có: $x = \frac{5}{7} + \frac{2}{5} = \frac{25 + 14}{35} = \frac{39}{35}$.

Vậy, ta được $x = \frac{39}{35}$.

Ví dụ 2: (Bài 9.c, 9.d/tr 10 – Sgk): *Tìm* x, *biết*:

a. $-x - \frac{2}{3} = -\frac{6}{7}$.   b. $\frac{4}{7} - x = \frac{1}{3}$.

Giải

a. Theo quy tắc chuyển vế, ta có: $\frac{6}{7}-\frac{2}{3}=x \Leftrightarrow x=\frac{18-14}{21}=\frac{4}{21}$.

Vậy, ta được $x=\frac{4}{21}$.

b. Theo quy tắc chuyển vế, ta có: $x=\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{12-7}{21}=\frac{5}{21}$.

Vậy, ta được $x=\frac{5}{21}$.

Ví dụ 3: *Tìm [x] biết:*

a. $x-\frac{8}{5}<-6<x$.

b. $-1\frac{1}{4}<x+\frac{2}{3}$ và $x<-\frac{1}{4}$.

Giải

a. Ta có: $x-\frac{8}{5}<-6 \Rightarrow x<-6+\frac{8}{5} \Rightarrow x<-\frac{22}{5}=-4\frac{2}{5}$.

Suy ra: $-6<x<-4\frac{2}{5} \Rightarrow [x]=-5$.

b. Ta có: $-1\frac{1}{4}<x+\frac{2}{3} \Rightarrow x+\frac{2}{3}>-1\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x>-1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{-23}{12}=-1\frac{11}{12} \Rightarrow x>-1\frac{11}{12}$.

Suy ra: $-1\frac{11}{12}<x<-\frac{1}{4} \Rightarrow [x]=-1$.

Ví dụ 4: *Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của các biểu thức:*

a. $A=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}$, với $x \in \mathbb{Q}$.

b. $B=\frac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2}$, với $x \in \mathbb{Q}$.

Giải

a. Nhận xét rằng: $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Do đó $A_{Min}=\frac{1}{2}$, đạt được khi: $x+\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

b. Nhận xét rằng: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2} \leq 1.$$

Do đó $A_{Max} = 1$, đạt được khi: $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vấn đề 3: BIỂU DIỄN MỘT SỐ HỮU TỈ THÀNH TỔNG HOẶC HIỆU CỦA CÁC SỐ HỮU TỈ KHÁC

Ví dụ 1: *Viết số hữu tỉ $\frac{5}{12}$ dưới các dạng sau đây:*

a. *Tổng của hai số hữu tỉ dương.*
b. *Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.*
c. *Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn: $\frac{5}{12} = \frac{2+3}{12} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

b. Ta có thể lựa chọn: $\frac{5}{12} = \frac{7+(-2)}{12} = \frac{7}{12} + \frac{-2}{12}$.

c. Giả sử số hữu tỉ còn lại cần tìm là x, ta được:

$$\frac{5}{12} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5-3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Vậy, ta có biểu diễn: $\frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

☞ ***Chú ý***: Việc tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số hữu tỉ (hoặc gọi là tổng của hai số hữu tỉ trái dấu) mang một ý nghĩa quan trọng, nó được sử dụng rất nhiều trong những dạng toán tính tổng . Ví dụ sau sẽ minh hoạ việc sử dụng phép tách cho số:

$$\frac{1}{k.(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k.(k+1)} = \frac{1}{k.} - \frac{1}{k+1} \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 2: *Tính*: $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{999.1000}$.

✍ *Giải*

Nhận thấy rằng với $k \in \mathbf{N}^*$, ta luôn có:

$$\frac{1}{k.(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k.(k+1)} = \frac{k+1}{k.(k+1)} - \frac{k}{k.(k+1)} = \frac{1}{k.} - \frac{1}{k+1}.$$

Suy ra, ta có:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

...

$$\frac{1}{999.1000} = \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

Vậy, ta được:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy:

- Khi gặp bài toán này, rất nhiều em học sinh tỏ ra lúng túng, bởi nghĩ rằng: $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}$

  tức là, cần có kiến thức về phép nhân hai số hữu tỉ (kiến thức này chưa học), tuy nhiên ở đây chúng ta đã sử dụng phép tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số hữu tỉ.
- Với phương pháp thực hiện tượng tự như trên, chúng ta sẽ có được kết quả tổng quát:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \frac{-5}{7} + \frac{7}{-5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4}$.

b. $B = \frac{2}{-5} + \frac{-3}{7} + \frac{-7}{10} + \frac{3}{-8}$.

c. $C = \frac{-5}{7} + \frac{2}{-7} + \frac{4}{-9} + \frac{4}{9}$.

d. $D = \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right)$.

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 1\frac{1}{8} - \frac{8}{9} + \frac{3}{25} + \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{19}{25} - \frac{1}{9} + \frac{2}{25} - \frac{1}{81}$.

b. $B = \frac{-1}{3} - \frac{8}{35} + \frac{-2}{9} - \frac{1}{135} + \frac{4}{5} + \frac{-4}{9} + \frac{3}{7}$.

Bài 3: Tìm x, biết:

a. $x - \frac{2}{35} = \frac{-3}{25}$.

b. $\frac{-2}{9} - x = \frac{1}{3}$.

c. $\frac{11}{12} - \left(x + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}$.

d. $\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài 4: Tìm [x] biết:

a. $x - \frac{2}{35} = 1$.

b. $\frac{9}{2} - x > \frac{1}{3}$.

c. $2 + x < \frac{5}{6} < x + 3$.

d. $x < -\frac{7}{4} < x + \frac{2}{7}$.

Bài 5: Điền số nguyên thích hợp vào ô trống:

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < \square < \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right).$$

Bài 6: Viết số hữu tỉ $\frac{7}{20}$ dưới các dạng sau đây:

a. Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

b. Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12}$.

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a. $B = -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121}$.

b. $C = \frac{15}{(x-8)^2 - 4}$.

c. $D = \frac{4}{(x + \frac{1}{3})^2 + 5}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $A = \frac{29}{140}$, $B = -1\frac{253}{280}$, $C = -1$, $D = \frac{83}{12}$.

Bài 2: Ta được:

a. $A = (1\frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{1}{4}) - (\frac{8}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81}) + (\frac{3}{25} + \frac{19}{25} + \frac{2}{25})$

$= \frac{17}{16} - \frac{82}{81} + \frac{24}{25} = \frac{32729}{32400}$.

b. $B = (\frac{-1}{3} + \frac{-2}{9} + \frac{-4}{9}) + (-\frac{8}{35} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}) - \frac{1}{135} = -1 + 1 - \frac{1}{135} = \frac{-1}{135}$.

Bài 3: Ta được:

a. $x = \frac{-11}{175}$.

b. $x = \frac{-5}{9}$.

c. $x = \frac{-3}{20}$.

d. $x = \frac{5}{12}$.

Bài 4: Ta được:

a. $[x] = 0$.

b. $[x] = 4$.

c. $[x] = -1$ hoặc $[x] = -2$.

d. $[x] = -1$ hoặc $[x] = -2$.

Bài 5: Ta đi xác định các giá trị của biểu thức VT và VP, cụ thể:

$$VT = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4+3}{12} = \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = \frac{6-7}{12} = \frac{-1}{12}.$$

$$VP = \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{48} - \frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{1-3+8}{48} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

Vậy, ta được biểu thức thu gọn:

$$\frac{-1}{12} < \square < \frac{1}{8}$$

do đó, số nguyên cần điền vào là 0.

Bài 7: Ta có:

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} \text{ với mọi } x \in \mathbb{Q}.$$

Vậy $A_{\text{nhỏ nhất}} = \frac{11}{12}$, đạt được khi: $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Bài 8:

a. Ta có: $\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121} \leq 0 - \frac{183}{121} = -\frac{183}{121}$$

Vậy $B_{\text{lớn nhất}} = -\frac{183}{121}$, đạt được khi:

$$\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{18}{1273} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18}{1273}.$$

b. Ta có: C lớn nhất $\Leftrightarrow MS = (x-8)^2 - 4$ nhỏ nhất.

Mà $MS = (x-8)^2 - 4 \geq -4$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Suy ra $MS_{\text{nhỏ nhất}} = -4$.

Vậy, $C_{\text{lớn nhất}} = \frac{-15}{4}$, đạt được khi: $(x-8)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

c. Ta có: D lớn nhất $\Leftrightarrow MS = (x + \frac{1}{3})^2 + 5$ nhỏ nhất.

Mà $MS = (x + \frac{1}{3})^2 + 5 \geq 5$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Vậy, $D_{\text{lớn nhất}} = \frac{4}{5}$, đạt được khi: $(x + \frac{1}{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ 3

NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. NHẮC LẠI PHÂN SỐ NGHỊCH ĐẢO

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, nghịch đảo của x (kí hiệu: x^{-1}) là một số hữu tỉ sao cho $x \cdot x^{-1} = 1$.

Nghịch đảo của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $\frac{b}{a}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$; $a, b \neq 0$.

2. NHÂN HAI SỐ HỮU TỈ

Tích của hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ kí hiệu: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ được xác định như sau:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}.$$

☛ ***Nhận xét***: Như vậy:

- Phép nhân hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện của chúng.
- Phép nhân trong $\mathbb{Q}$ có những tính chất cơ bản giống phép nhân trong $\mathbb{Z}$, bao gồm: giao hoán, kết hợp, nhân với phần tử trung hòa, phân phối của phép nhân với phép cộng.

3. CHIA HAI SỐ HỮU TỈ

Thương của hai số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ (với $y \neq 0$) gọi là tỉ số của x và y, kí hiệu:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

là phép nhân giữa số bị chia và phân số nghịch đảo của số chia.

$$x : y = x.y^{-1} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Tính nhanh giá trị của biểu thức sau:*

$$A = \frac{0,75 + 0,6 + \frac{3}{7} + \frac{9}{24}}{2,75 + 2,2 + \frac{11}{7} + \frac{33}{24}}.$$

✍ Giải

Viết lại biểu thức A dưới dạng:

$$A = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{7}+\frac{3}{8}}{\frac{11}{4}+\frac{11}{5}+\frac{11}{7}+\frac{11}{8}} = \frac{3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}{11\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)} = \frac{3}{11}.$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, bằng việc chuyển các số thập phân về dạng hữu tỉ, rồi thiết lập nhân tử chung, chúng ta đã có được kết quả nhanh chóng.

Ví dụ 2: *Thực hiện phép tính*:

a. $A = 2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}$.

b. $B = 2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$.

✍ Giải

a. Ta có: $A = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}} = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$B = 2 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{8}{3}}} = 2 + \frac{1}{1+\dfrac{3}{8}} = 2 + \frac{1}{\dfrac{11}{8}} = 2 + \frac{8}{11} = \frac{30}{11}.$$

Ví dụ 3: (Bài 13.a, 13.b/tr 12 – Sgk): *Tính*:

a. $A = \dfrac{-3}{4}.\dfrac{12}{-5}.\left(-\dfrac{25}{6}\right)$.

b. $B = (-2).\dfrac{-38}{21}.\dfrac{-7}{4}.\left(-\dfrac{3}{8}\right)$.

✍ Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách:

Cách 1: Ta có biến đổi: $A = \dfrac{-3}{4}.\dfrac{12}{-5}.\dfrac{-25}{6} = \dfrac{-3.12.(-25)}{4.(-5).6} = \dfrac{900}{-120} = -\dfrac{15}{2}$.

Cách 2: Ta có biến đổi: $A = 3.\dfrac{3}{5}.\dfrac{-25}{6} = 3.\dfrac{-5}{2} = -\dfrac{15}{2}$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách:

Cách 1: Ta có biến đổi: $B = \dfrac{(-2).(-38).(-7).(-3)}{21.4.8} = \dfrac{1596}{672} = \dfrac{19}{8}$.

Cách 2: Ta có biến đổi: $B = \dfrac{38}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{8} = 19.\dfrac{1}{8} = \dfrac{19}{8}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với các yêu cầu dạng trên các em học sinh hãy sử dụng cách 2 để tránh được việc phải giản ước phân số về dạng tối giản.

Ví dụ 4: (Bài 13.c, 13.d/tr 12 – Sgk): *Tính*:

a. $A=\left(\frac{11}{12}:\frac{33}{16}\right).\frac{3}{5}$. b. $B=\frac{7}{23}.\left[\left(-\frac{8}{6}\right)-\frac{45}{18}\right]$.

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi: $A=\left(\frac{11}{12}.\frac{16}{33}\right).\frac{3}{5}=\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{3}\right).\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$.

b. Ta có biến đổi: $B=\frac{7}{23}.\left(-\frac{8}{6}-\frac{45}{18}\right)=\frac{7}{23}.\frac{-24-45}{18}=\frac{7}{23}.\frac{-69}{18}=-\frac{7}{6}$.

Hoặc thực hiện theo cách:

$$B=\frac{7}{23}.\left(-\frac{4}{3}-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{23}.\frac{-8-15}{6}=\frac{7}{23}.\frac{-23}{6}=-\frac{7}{6}.$$

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính giá trị của các biểu thức trên chúng ta sử dụng quy tắc tính "*Trong ngoặc trước, ngoài ngoặc sau*".

Ví dụ 5: (Bài 16/tr 13 – Sgk): *Tính*:

a. $A=\left(\frac{-2}{3}+\frac{3}{7}\right):\frac{4}{5}+\left(\frac{-1}{3}+\frac{4}{7}\right):\frac{4}{5}$.

b. $B=\frac{5}{9}:\left(\frac{1}{11}-\frac{5}{22}\right)+\frac{5}{9}:\left(\frac{1}{15}-\frac{2}{3}\right)$.

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi:

$$A=\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}+\frac{4}{7}\right):\frac{4}{5}=\left[\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)\right].\frac{5}{4}=(-1+1).\frac{5}{4}=0.$$

b. Ta có biến đổi: $B=\frac{5}{9}:\left(\frac{2-5}{22}\right)+\frac{5}{9}:\left(\frac{1-10}{15}\right)=\frac{5}{9}:\left(-\frac{3}{22}\right)+\frac{5}{9}:\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{5}{9}.\frac{22}{3}-\frac{5}{9}.\frac{5}{3}=\frac{-110-25}{27}=\frac{-135}{27}=-5.$$

Ví dụ 6: *Cho biểu thức* $A=\frac{2x-3}{5x+1}$. *Tìm các giá trị của* x *để*:

a. $A=0$. b. $A>0$. c. $A<0$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $A=0\Leftrightarrow\frac{2x-3}{5x+1}=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Vậy, với $x = \frac{3}{2}$ thì $A = 0$.

b. Ta có: $A > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} > 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải cùng dấu.

Ta có hai trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

- $\begin{cases} 2x-3<0 \\ 5x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}$.

Vậy, với $x > \frac{3}{2}$ hoặc $x < \frac{-1}{5}$ thì $A > 0$.

c. Ta có: $A < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} < 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải khác dấu.

Ta có hai trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases}$.

Vô lý, do không có số x nào thỏa mãn $x > \frac{3}{2}$ và $x < -\frac{1}{5}$.

- $\begin{cases} 2x-3<0 \\ 5x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{3}{2}$.

Vậy, với $\frac{-1}{5} < x < \frac{3}{2}$ thì $A < 0$.

Ví dụ 7: *Tìm hai số* x *và* y *sao cho* $x + y = x.y = \frac{x}{y}$, *với* $y \neq 0$.

✍ *Giải*

Xuất phát từ giả thiết

$$x + y = x.y \Leftrightarrow x = x.y - y = y(x-1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = x - 1. \qquad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết ta cũng có: $\frac{x}{y} = x + y$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $x - 1 = x + y \Leftrightarrow y = -1$

Khi đó: $x - 1 = x(-1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy, với $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: *Cho* $x, y \in \mathbb{Q}$. *Chứng minh rằng*: $-(x.y) = (-x).y = x.(-y)$.

Giải

Ta biểu diễn x, y dưới dạng:

$$x = \frac{a}{b} \text{ và } y = \frac{c}{d} \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ và } b > 0, d > 0$$

$$\Rightarrow -x = \frac{-a}{b} \text{ và } -y = \frac{-c}{d}.$$

Ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1. Ta có:

$$x \,.\, y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}.$$

$$\Rightarrow -(x \,.\, y) = \frac{-(a.c)}{b.d} = \frac{(-a).c}{b.d} = \frac{-a}{b}.\frac{c}{d} = (-x).y. \quad (1)$$

Lại có:

$$-(x \,.\, y) = \frac{-(a.c)}{b.d} = \frac{a.(-c)}{b.d} = \frac{a}{b}.\frac{-c}{d} = x.(-y) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $-(x.y) = (-x).y = x.(-y)$.

Cách 2. Ta có:

$$x.y + (-x).y = \frac{a.c}{b.d} + \frac{(-a).c}{b.d} = \frac{a.c + (-a).c}{b.d} = 0$$

$$\Rightarrow x.y = (-x).y. \quad (3)$$

Lại có:

$$x.y + x.(-y) = \frac{a.c}{b.d} + \frac{a.(-c)}{b.d} = \frac{a.c + a.(-c)}{b.d} = 0$$

$$\Rightarrow x.y = x.(-y). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $-(x.y) = (-x).y = x.(-y)$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính nhanh giá trị của biểu thức sau: $A = \dfrac{0,75 + 0,6 - \frac{3}{7} - \frac{3}{13}}{2,75 + 2,2 - \frac{11}{7} - \frac{11}{13}}$.

Bài 2: Cho $x, y \in \mathbf{Q}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Chứng minh rằng:

a. $(x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$.   b. $(x.y^{-1})^{-1} = x^{-1}.y$.

Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \left(\frac{-8}{19}\right).\left(\frac{25}{34}\right).\left(\frac{-17}{5}\right).\left(\frac{19}{-27}\right)$.

b. $B = \left(\frac{-12}{35}\right).\left(\frac{-21}{15}\right).\left(\frac{25}{9}\right)$.

Bài 4: Tìm x, biết:

a. $x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$.

b. $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} : x = \frac{4}{5}$.

Bài 5: Tìm các số nguyên x, thoả mãn:

$$2\frac{3}{11}.1\frac{1}{12}.(-2,2) < x < \left(0,4 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4} - 0,2\right).$$

Bài 6: Tìm x, biết:

a. $(x + 1)(x - \frac{3}{2}) < 0$.

b. $(x - 2)(x - \frac{1}{2}) > 0$.

Bài 7: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau nhận giá trị dương.

a. $A = x^2 + 6$.

b. $B = (5 - x)(x + 8)$.

c. $C = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$.

Bài 8: Tìm các giá trị của x để: $A = \frac{5x+4}{3x-1}$.

a. $A = 0$.

b. $A > 0$.

c. $A < 0$.

Bài 9: Tìm x, biết:

a. $\frac{6}{7}x = \frac{-5}{28}$.

b. $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}x = \frac{-3}{10}$.

c. $\left(x + \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0$.

d. $(3x - 2)(2x - \frac{2}{3}) = 0$.

Bài 10: Cho hai biểu thức:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)...\left(1 - \frac{1}{19}\right)\left(1 - \frac{1}{20}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)...\left(1 - \frac{1}{81}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

a. So sánh A với $\frac{1}{21}$.

b. So sánh B với $\frac{11}{21}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $A = \frac{3}{11}$.

Bài 2: *Hướng dẫn:*

a. Ta có: $(x.y)(x^{-1}.y^{-1}) = 1 \Rightarrow (x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$.

b. Ta có: $(x.y^{-1})(x^{-1}.y) = 1 \Rightarrow (x.y^{-1})^{-1} = x^{-1}.y$.

Bài 3:

a. Ta có: $A = \left(\frac{-8}{19}.\frac{19}{-27}\right).\left(\frac{25}{34}.\frac{-17}{5}\right) = \left(\frac{8}{27}\right).\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-20}{27}$.

b. Ta có: $B = \left(\frac{-12}{35}.\frac{25}{9}\right).\left(\frac{-21}{15}\right) = \left(\frac{-20}{21}\right).\left(\frac{-21}{15}\right) = \frac{4}{3}$.

Bài 5: Ta có: $VT = 2\frac{3}{11}.1\frac{1}{12}.(-2,2) = -5\frac{5}{12}$, $VP = \left(0,4 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4} - 0,2\right) = -0,22$.

Suy ra $-5\frac{5}{12} < x < -0,22$

Vậy, các giá trị nguyên của x là $-5, -4, -3, -2, -1$.

Bài 6: a). $-1 < x < \frac{3}{2}$. b). $x > 2$ hoặc $x < \frac{1}{2}$.

Bài 7: Ta được:

a). $A > 0 \Leftrightarrow$ mọi x. b). $B > 0 \Leftrightarrow -8 < x < 5$. c). $C > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ hoặc $x > 3$.

Bài 8: Ta được:

a). $A = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{5}$. b). $A > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ hoặc $x < \frac{-4}{5}$.

c). $A < 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

Bài 9:

a. Ta có: $\frac{6}{7}x = \frac{-5}{28} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{28} : \frac{6}{7} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{24}$.

b. Ta có: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}x = \frac{-3}{10} \Leftrightarrow x = \left(\frac{-3}{10} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-7}{10} : \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-14}{5}$.

c. Ta có: $\left(x + \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{4}{7} = 0 \\ x - \frac{8}{9} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{7} \\ x = \frac{8}{9} \end{array}\right.$.

Bài 10:

a. Ta có: $A = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{18}{19}.\frac{19}{20} = \frac{1}{20} > \frac{1}{21} \Rightarrow A > \frac{1}{21}$.

b. Ta có:

$$B = \frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}...\frac{80}{81}.\frac{99}{100} = \frac{3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}.\frac{4.6}{5^2}...\frac{8.10}{9^2}.\frac{9.11}{10^2}$$

$$= \frac{2.3^2.4^2.5^2...9^2.10.11}{2^2.3^2.4^2.5^2...9^2.10^2} = \frac{11}{20} > \frac{11}{21}.$$

$\Rightarrow B > \frac{11}{21}$.

CHỦ ĐỀ 4

GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ
CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x (kí hiệu |x|) là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số, được xác định như sau: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy:

- Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ ta luôn có: $|x| \ge 0$ và $|x| \ge x$.
- Trong hai số hữu tỉ âm, số hữu tỉ nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì nhỏ hơn.
- Ta có: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- Việc sử dụng tính chất dấu trị tuyệt đối, cho phép chúng ta bước đầu làm quen với việc giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

2. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

Khi cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

Trong khi thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân ta thường áp dụng các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như số nguyên.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

Ví dụ 1: (Bài 20.a, 20.b/tr 15 – Sgk): *Tính nhanh*:

a. $A = 6,3 + (-3,7) + 2,4 + (-0,3)$.

b. $B = (-4,9) + 5,5 + 4,9 + (-5,5)$.

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi: $A = [6,3 + 2,4] + [(-3,7) + (-0,3)] = 8,7 - 4 = 4,7$

hoặc biến đổi: $A = [6,3 + (-0,3)] + [(-3,7) + 2,4] = 6 - 1,3 = 4,7$.

b. Ta có biến đổi: $B = [(-4,9) + 4,9] + [5,5 + (-5,5)] = 0$.

Ví dụ 2: (Bài 20.c, 20.d/tr 15 – Sgk): *Tính nhanh*:

a. $A = 2,9 + 3,7 + (-4,2) + (-2,9) + 4,2$.

b. $B = (-6,5) . 2,8 + 2,8 . (-3,5)$.

Giải

a. Ta có biến đổi: A = [2,9 + (−2,9)] + 3,7 + [(−4,2) + 4,2] = 3,7.

b. Ta có biến đổi: B = [(−6,5) + (−3,5)]. 2,8 = −10. 2,8 = −28.

Vấn đề 2: MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 1: (Bài 17/tr 15 – Sgk): *Tìm* x, *biết*:

a. $|x| = \frac{1}{5}$. b. $|x| = 0,37$. c. $|x| = 0$. d. $|x| = 1\frac{2}{3}$.

Giải

a. Ta có ngay $x = \pm\frac{1}{5}$.

b. Ta có ngay $x = \pm 0,37$.

c. Ta có ngay $x = 0$.

d. Ta có ngay $x = \pm 1\frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: (Bài 25/tr 16 – Sgk): *Tìm* x, *biết*:

a. $|x - 1,7| = 2,3$. b. $\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{3} = 0$.

Giải

a. Ta có: $|x - 1,7| = 2,3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1,7 = 2,3 \\ x - 1,7 = -2,3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2,3 + 1,7 \\ x = -2,3 + 1,7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -0,6 \end{array}\right.$.

Vậy, tồn tại hai giá trị của x là x = 4 hoặc x = −0,6.

b. Ta có biến đổi: $\left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5}{12} \\ x = -\frac{13}{12} \end{array}\right.$.

Vậy, tồn tại hai giá trị của x là $x = -\frac{5}{12}$ và $x = -\frac{13}{12}$.

Ví dụ 3: *Tìm* x, *biết*:

a. $|x - 1| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. b. $|x - 1| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Giải

a. Ta có biến đổi: $|x - 1| = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 1| = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \frac{1}{6} \\ x - 1 = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6} \\ x = \frac{5}{6} \end{array}\right.$.

Vậy, tồn tại hai giá trị của x là $x = \frac{7}{6}$ và $x = \frac{5}{6}$.

b. Ta có biến đổi: $|x-1| = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x-1| = -\frac{1}{6}$.

Vì $|x-1| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ nên không tìm được số hữu tỉ x nào thỏa mãn đẳng thức trên.

Ví dụ 4: *Tìm x, y, z biết:*

a. $\left|x-\frac{1}{2}\right| + \left|y+\frac{3}{2}\right| + \left|x+y-z-\frac{1}{2}\right| = 0$.

b. $|1-x| + \left|y-\frac{2}{3}\right| + |x+z| \leq 0$.

Giải

a. Ta có: $\left|x-\frac{1}{2}\right| \geq 0$, $\left|y+\frac{3}{2}\right| \geq 0$, $\left|x+y-z-\frac{1}{2}\right| \geq 0$,

do đó, để có đẳng thức trên điều kiện là:

$$\begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y+\frac{3}{2}\right| = 0 \\ \left|x+y-z-\frac{1}{2}\right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2} = 0 \\ y+\frac{3}{2} = 0 \\ x+y-z-\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy, ta được $x = \frac{1}{2}$, $z = y = -\frac{3}{2}$.

b. Ta có: $|1-x| \geq 0$, $\left|y-\frac{2}{3}\right| \geq 0$, $|x+z| \geq 0$,

do đó, để có bất đẳng thức trên điều kiện là:

$$|1-x| + \left|y-\frac{2}{3}\right| + |x+z| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |1-x| = 0 \\ \left|y-\frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x+z| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 0 \\ y-\frac{2}{3} = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy, ta được $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -1$.

Ví dụ 5: *Chứng minh rằng với mọi* $x, y \in \mathbb{Q}$ *ta luôn có:*

a. $|x+y| \leq |x| + |y|$.　　　　b. $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Giải

a. Ta biểu diễn hai số hữu tỉ x, y dưới dạng:

$$x = \frac{a}{b} \text{ và } y = \frac{c}{d} \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z};\ b, d \neq 0.$$

Ta có: $\left|\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad+cb}{bd}\right| = \frac{|ad+cb|}{|bd|}$.

Với a, b, c, d là những số nguyên ta luôn có: $|ad + cb| \le |ad| + |cb|$.

Suy ra: $\frac{|ad+cb|}{|bd|} \le \frac{|ad|+|cb|}{|bd|} = \frac{|ad|}{|bd|} + \frac{|cb|}{|bd|} = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{c}{d}\right| = |x| + |y|$.

Vậy, ta được: $|x + y| \le |x| + |y|$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x.y \ge 0$.

b. Ta có: $x = x - y + y$.

Suy ra: $|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x - y| \ge |x| - |y|$.

Vậy, ta được: $|x - y| \ge |x| - |y|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x.y \ge 0$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính nhanh:

a. $A = 5,6 + (-7,3) - 15,6 + (-65,7)$.

b. $B = 3,5.(-31,7) + 45,9.\ 0,6 + 3,5.\ 21,7 - 0,6.(-54,1)$.

Bài 2: Tính nhanh:

a. $A = 3,7 + (-11,8) - 15,7 + (-35,2)$.

b. $B = 13,9.(-24,5) + 17,2.\ 0,3 + 13,9.\ 14,5 - 0,3.(-82,8)$.

Bài 3: Tìm |x|, biết:

a. $x = \frac{5}{12}$. b. $x = \frac{-3}{2}$. c. $x = \frac{-15}{-18}$. d. $x = 0$.

Bài 4: *Tìm* x, *biết*:

a. $|x - 1| - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$. b. $|x| + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

Bài 5: Tìm x, biết:

a. $|x| = \frac{5}{7}$.

b. $|x| = \frac{-13}{-17}$.

c. $|x| = \frac{-3}{4}$.

d. $|0,9 - x| = 1,7$.

e. $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15}$.

f. $\left|x + \frac{9}{8}\right| = 1$.

g. $2\left|\frac{2}{3} - x\right| + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Bài 6: Tìm x, y, z biết:

a. $\left|\frac{1}{4} - x\right| + |x - y + z| + \left|\frac{2}{3} + y\right| = 0$. b. $\left|\frac{15}{32} - x\right| + \left|\frac{4}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{31}\right| < 0$.

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a. $A = |x - 5| - |x - 7|$. b. $B = |125 - x| + |x - 65|$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Ta có: $A = (5,6 - 15,6) - (7,3 + 65,7) = -10 - 73 = -83$.

b. Ta có: $B = 3,5.(-31,7) + 45,9.\ 0,6 + 3,5.\ 21,7 + 0,6.54,1$

$= 3,5(-31,7 + 21,7) + 0,6(45,9 + 54,1) = 3,5.(-10) + 0,6.100 = -35 + 60 = 25.$

Bài 2: $A = -59$, $B = 169$.

Bài 3:

a). $|x| = \left|\frac{5}{12}\right| = \frac{5}{12}$. b). $|x| = \frac{3}{2}$. c). $|x| = \frac{15}{18}$. d). $|x| = 0$.

Bài 4:

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$|x - 1| = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3.2+1}{8} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \frac{7}{8} \\ x - 1 = -\frac{7}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{8} + 1 = 1\frac{7}{8} \\ x = -\frac{7}{8} + 1 = \frac{1}{8} \end{array}\right..$$

Vậy, ta tìm được hai giá trị của x là $x = 1\frac{7}{8}$ hoặc $x = \frac{1}{8}$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng: $|x| = \frac{5}{6} - \frac{5}{2} = \frac{5 - 3.5}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} < 0$.

Do đó, không có giá trị nào của x.

Bài 5:

a). $x = \pm\frac{5}{7}$. b). $x = \pm\frac{13}{17}$. c). Không tồn tại vì $|x| \geq 0$.

d). $x = -0,8$ hoặc $x = 2,6$.

e). Ta có: $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = -\frac{1}{15}$.

f). $x = \frac{-1}{8}$ hoặc $x = \frac{-17}{8}$. g). $x = \frac{11}{12}$ hoặc $x = \frac{5}{12}$.

Bài 6: Ta được:

a. $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{-2}{3}$; $z = \frac{-11}{12}$. b. Không có x, y, z nào thỏa mãn.

Bài 7:

a. Áp dụng $|x - y| \geq |x| - |y|$, ta có:

$|x - 5| - |x - 7| \leq |(x - 5) - (x - 7)| = |x - 5 - x + 7| = 2.$

Vậy, ta có $A_{lớn\ nhất} = 2$ đạt được khi: $(x - 5).(x - 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7$ hoặc $x \leq 5$.

b. Áp dụng $|x + y| \leq |x| + |y|$, ta có: $|125 - x| + |x - 65| \geq |125 - x + x - 65| = 60$.

Vậy, ta có $A_{nhỏ\ nhất} = 60$ đạt được khi: $(125 - x).(x - 65) \geq 0 \Leftrightarrow 65 \leq x \leq 125$.

CHỦ ĐỀ 5

LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x, kí hiệu x^n, là tích của n thừa số x (n là một số tự nhiên lớn hơn 1).

$$x^n = \underbrace{x.x.x...x}_{\text{n thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

đọc là x mũ n hoặc x lũy thừa n hoặc lũy thừa bậc n của x; x gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

Quy ước: Ta quy ước: $x^1 = x$.

$x^0 = 1$ (với $x \neq 0$).

Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng $x = \dfrac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)

ta có: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b}.\dfrac{a}{b}...\dfrac{a}{b}}_{\text{n thừa số}} = \dfrac{\overbrace{a.a...a}^{\text{n thừa số}}}{\underbrace{b.b...b}_{\text{n thừa số}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Vậy, ta luôn có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

2. TÍCH VÀ THƯƠNG CỦA HAI LUỸ THỪA CÙNG CƠ SỐ

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$

- Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ. Tức là: $x^m . x^n = x^{m+n}$.
- Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của số bị chia trừ đi số mũ của số chia. Tức là: $x^m : x^n = x^{m-n}$ (với $x \neq 0$).

3. LUỸ THỪA CỦA LUỸ THỪA

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{N}$. Khi tính lũy thừa của một lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ. Tức là: $(x^m)^n = x^{m.n}$.

4. LUỸ THỪA CỦA MỘT TÍCH

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{N}$. Lũy thừa của một tích thì bằng tích các lũy thừa

Tức là: $(x.y)^n = x^n. y^n$.

5. LUỸ THỪA CỦA MỘT THƯƠNG

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$. Lũy thừa của một thương thì bằng thương các lũy thừa.

Tức là: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.

6. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN ÂM

Với mọi $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0; n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy:

- Cho $m > n > 0$. Có thể xảy ra 3 trường hợp sau:
  a. Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$.
  b. Nếu $a = 1$ thì $a^m = a^n$.
  c. Nếu $a < 1$ thì $a^m < a^n$.
- Lũy thừa bậc chẵn của hai số đối nhau thì bằng nhau.
  $(-x)^{2n} = x^{2n}$.
- Lũy thừa bậc lẻ của hai số đối nhau thì đối nhau.
  $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Tính giá trị của các biểu thức:*

a. $A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2}.16 - 2.5^2$.

b. $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right).\frac{1}{8} + 3^{-2}.9 - 7.\left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2}.16 - 2.5^2 = 4 - (-9)^3 + \frac{1}{4^2}.16 - 2.25$

$= 4 + 729 + 1 - 50 = 684$.

b. Ta có: $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right).\frac{1}{8} + 3^{-2}.9 - 7.\left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5$

$= 2^3.2.\frac{1}{8} + \frac{1}{9}.9 - 7.1 + 5 = 2 + 1 - 7 + 5 = 1$.

Ví dụ 2: *Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:*

a. $3^{-2}.9^n = 3^n$.

b. $\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$.

c. $a^{(n+5)(n-8)} = 1$.

d. $\frac{1}{2}.2^n = 2^1.3^2.4^2 - 4.2^n$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $3^{-2}.9^n = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2}.3^{2n} = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2+2n} = 3^n \Leftrightarrow 2n - 2 = n \Leftrightarrow n = 2$.
Vậy, đẳng thức đúng khi $n = 2$.

b. Ta có: $\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$

$\Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2$.

Vậy, đẳng thức đúng khi $n = -2$.

c. Ta có: $a^{(n+5)(n-8)} = 1 \Leftrightarrow (n+5)(n-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+5=0 \\ n-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-5 \\ n=3 \end{array}\right.$

Vậy, đẳng thức đúng khi n = – 5 hoặc n = 3.

d. Ta có:

$$\frac{1}{2}.2^n = 2^1.3^2.4^2 - 4.2^n \Leftrightarrow 2^{-1}.2^n + 4.2^n = 3^2.2.(2^2)^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} + 4.2^n = 9.2^5$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1}(1 + 4.2) = 9.2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1}.9 = 9.2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Leftrightarrow n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy, đẳng thức đúng khi n = 6.

Ví dụ 3: *Tìm* x *biết*:

a. $(2x-2)^2 = 16.$ c. $(1-x)^3 = 216.$

b. $3^{x+1} - 3^x = 162.$ d. $5^{x+1} - 2.5^x = 375.$

Giải

a. Ta có: $(2x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow (2x-2)^2 = (\pm 4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=4 \\ 2x-2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy, có hai số cần tìm là x = 3 và x = –1.

b. Ta có: $3^{x+1} - 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x(3-1) = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy, số cần tìm là x = 4.

c. Ta có: $(1-x)^3 = 216 \Leftrightarrow (1-x)^3 = 6^3 \Leftrightarrow 1 - x = 6 \Leftrightarrow x = -5.$

Vậy, số cần tìm là x = – 5.

d. Ta có: $5^{x+1} - 2.5^x = 375 \Leftrightarrow 5^x(5-2) = 375 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy, số cần tìm là x = 3.

Ví dụ 4: *Tìm các số tự nhiên* n, *biết*:

a. $4 < 2^n \le 2.16.$ b. $9.27 \le 3^n \le 243.$

Giải

a. Ta có: $4 = 2^2$, $2.16 = 2.2^4 = 2^{1+4} = 2^5$, do đó:

$$4 < 2^n \le 2.16 \Leftrightarrow 2^2 < 2^n \le 2^5 \Leftrightarrow 2 < n \le 5.$$

Từ đó, ta có các số tự nhiên n là n = 3, n = 4, n = 5.

b. Ta có: $9.27 = 3^2.3^3 = 3^{2+3} = 3^5$, $243 = 3^5$, do đó:

$$9.27 \le 3^n \le 243 \Leftrightarrow 3^5 \le 3^n \le 3^5 \Leftrightarrow 5 \le n \le 5.$$

Từ đó, ta có số tự nhiên n = 5.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 2^{-3} + (5^2)^3.5^{-3} + 4^{-3}.16 - 2.3^2 - 105.\left(\frac{24}{51}\right)^0.$

b. $B = \left(2^{-3} : \frac{1}{2^{-2}}\right).\frac{2}{3} + 4^{-2}.8 - 7.\left(\frac{17}{23}\right)^0 + 19.$

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a. $5^{-3}.25^{n} = 5^{3n}$.

b. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-12}$.

c. $a^{(2n+6)(3n-9)} = 1$.

d. $\dfrac{1}{3}.3^{n} = 7.3^{2}.9^{2} - 2.3^{n}$.

Bài 3: Tìm x biết:

a. $(x-5)^{2} = 25$.

b. $9^{x+1} - 5.3^{2x} = 324$.

c. $(1-x)^{5} = 32$.

d. $3.5^{2x+1} - 3.25^{x} = 300$.

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức sau:

a. $A = \dfrac{25^{3}.5^{5}}{6.5^{10}}$.

b. $B = \dfrac{2^{5}6^{3}}{8^{2}.9^{2}}$.

c. $C = \dfrac{15^{3} + 5.15^{2} - 5^{3}}{18^{3} + 6.18^{2} - 6^{3}}$.

d. $D = \dfrac{\left(7^{4} - 7^{3}\right)^{2}}{49^{3}}$.

Bài 5: Tìm x biết:

a. $16^{x} : 4^{x} = 16$.

b. $2^{-1}.2^{x} + 4.2^{x} = 72$.

c. $(2x+1)^{3} = -64$.

d. $(3x-2)^{2} = 81$.

Bài 6: Tìm các số tự nhiên n, biết:

a. $8 < 2^{n} \le 2.32$.

b. $3.27 \le 3^{n} \le 243$.

c. $8.27 \le 6^{n} \le 36.4.9$.

d. $\dfrac{1}{4} \le 2^{n} \le 4$.

e. $9.27 \le \dfrac{1}{3^{n}} \le 27.243$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $A = 2\dfrac{3}{8}$, $B = \dfrac{601}{48}$.

Bài 2:

a). $n = -3$. b). $n = -4$. c). $n = -3$ hoặc $n = 3$.

d). Ta có: $\dfrac{1}{3}.3^{n} = 7.3^{2}.9^{2} - 2.3^{n} \Leftrightarrow 3^{-1}.3^{n} + 2.3^{n} = 7.3^{2}.(3^{2})^{2}$

$\Leftrightarrow 3^{n-1}(1 + 2.3) = 7.3^{2}.3^{4} \Leftrightarrow 3^{n-1}.7 = 7.3^{6} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^{6} \Leftrightarrow n = 7$.

Bài 3:

a). $x = 0$ hoặc $x = 10$. b). $x = 2$. c). $x = -1$. d). $x = 1$.

Bài 4:

a. Ta có $A = \dfrac{25^{3}.5^{5}}{6.5^{10}} = \dfrac{5^{11}}{6.5^{10}} = \dfrac{5}{6}$.

b. Ta có $B = \dfrac{2^{5}6^{3}}{8^{2}.9^{2}} = \dfrac{2^{5}(2.3)^{3}}{\left(2^{3}\right)^{2}.\left(3^{2}\right)^{2}} = \dfrac{2^{8}3^{3}}{2^{6}.3^{4}} = \dfrac{4}{3}$.

c. Ta có:

$$C = \frac{15^3 + 5.15^2 - 5^3}{18^3 + 6.18^2 - 6^3} = \frac{(3.5)^3 + 5.(3.5)^2 - 5^3}{(6.3)^3 + 6.(3.6)^2 - 6^3} = \frac{5^3(3^3 + 3^2 - 1)}{6^3(3^3 + 3^2 - 1)} = \frac{5^3}{6^3}$$

d. Ta có:

$$D = \frac{\left(7^4 - 7^3\right)^2}{49^3} = \frac{7^4 - 7^3}{49^3}.(7^4 - 7^3) = \left(\frac{7^4}{49^3} - \frac{7^3}{49^3}\right).(7^4 - 7^3)$$

$$= \left(\frac{7^4}{7^6} - \frac{7^3}{7^6}\right).(7^4 - 7^3) = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}\right).(7^4 - 7^3)$$

$$= \frac{6}{7^3}.(7^4 - 7^3) = \frac{6}{7^3}.7^3(7 - 1) = 36.$$

Bài 5:

a). $x = 2$. b). $x = 4$.

c). Ta có: $(2x + 1)^3 = (-4)^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

d). Ta có: $(3x - 2)^2 = 9^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 9 \\ 3x - 2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11}{3} \\ x = \frac{-7}{3} \end{array}\right.$.

Bài 6:

a. Ta có: $8 < 2^n \le 2.32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \le 2.2^5 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \le 2^6 \Leftrightarrow 3 < n \le 6$.
Vậy, ta nhận được các số 4, 5, 6.

b. Ta có: $3.27 \le 3^n \le 243 \Leftrightarrow 3.3^3 \le 3^n \le 3^5 \Leftrightarrow 3^4 \le 3^n \le 3^5 \Leftrightarrow 4 \le n \le 5$
Vậy, ta nhận được các số 4, 5.

c. Ta có:

$$8.27 \le 6^n \le 36.4.9 \Leftrightarrow 2^3.3^3 \le 6^n \le 6^2.2^2.3^2 \Leftrightarrow 6^3 \le 6^n \le 6^2.6^2$$

$$\Leftrightarrow 6^3 \le 6^n \le 6^4 \Leftrightarrow 3 \le n \le 4.$$

Vậy, ta nhận được các số 3, 4.

d. Ta có: $\frac{1}{4} \le 2^n \le 4 \Leftrightarrow 2^{-2} \le 2^n \le 2^2 \Leftrightarrow -2 \le n \le 2$.

Vậy, ta nhận được các số -2, -1, 0, 1, 2.

e. Ta có:

$$9.27 \le \frac{1}{3^n} \le 27.243 \Leftrightarrow 3^2.\ 3^3 \le 3^{-n} \le 3^3.\ 3^5 \Leftrightarrow 3^5 \le 3^{-n} \le 3^8$$

$$\Leftrightarrow 5 \le -n \le 8 \Leftrightarrow -8 \le n \le -5.$$

Vậy, ta nhận được các số $-8, -7, -6, -5$.

CHỦ ĐỀ 6

TỈ LỆ THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc a : b = c : d

☛ ***Chú ý***: Trong:

- Tỉ lệ thức a : b = c : d thì:
  a. Các số a, b, c, d là các *số hạng* của tỉ lệ thức.
  b. Các số a và d là các *ngoại tỉ*.
  c. Các số b và c là các *trung tỉ*.
- Trường hợp b = 100, ta có tỉ lệ phần trăm $\frac{a}{100} = a\%$.

2. TÍNH CHẤT

Với a, b, c, d ≠ 0, ta có:

Tính chất 1. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì ad = bc.

Tính chất 2. Nếu có ad = bc thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

3. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Ta luôn có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \text{ với } b \neq \pm d.$$

☛ ***Chú ý***:

1. Tính chất trên còn được mở rộng cho dãy nhiều tỉ số bằng nhau, cụ thể:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{ma \pm nc \pm pe}{mb \pm nd \pm pf}.$$

Kết quả này thực sự có hiệu quả khi biến đổi phân thức cũng như chứng minh các hệ thức có chứa dãy tỉ số bằng nhau.

2. Nếu có dãy $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, ta nói:
   - Các số a, b, c tỉ lệ với các số x, y, z.
   - Hoặc a : b : c = x : y: z.
3. Và cũng từ đây, nảy sinh ra dạng toán " *Tìm các số* x, y, ... *biết tỉ số giữa chúng cũng một biểu thức tổng* S ".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 44/tr 26 – Sgk): *Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ bằng tỉ số giữa các số nguyên:*

a. $1,2 : 3,24$ c. $2\frac{1}{5}:\frac{3}{4}$

c. $\frac{2}{7}:0,42.$

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi: $1,2 : 3,24 = \frac{1,2}{3,24} = \frac{120}{324} \overset{:4}{=} \frac{30}{81} \overset{:3}{=} \frac{10}{27}.$

b. Ta có biến đổi: $\frac{11}{5}:\frac{3}{4} = \frac{11}{5}.\frac{4}{3} = \frac{44}{15}.$

c. Ta có biến đổi: $\frac{2}{7}:\frac{42}{100} = \frac{2}{7}:\frac{21}{50} = \frac{2}{7}.\frac{50}{21} = \frac{100}{147}.$

Ví dụ 2: (Bài 45/tr 26 – Sgk): *Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau đây rồi lập các tỉ lệ thức:*

$$28 : 14;\quad 2\frac{1}{2}:2;\quad 8 : 4;\quad \frac{1}{2}:\frac{2}{3};\quad 3 : 10;\quad 2,1 : 7;\quad 3 : 0,3.$$

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

$28 : 14 = 2 : 1 = 2$; $2\frac{1}{2}:2 = \frac{5}{2}:2 = \frac{5}{4}$;

$8 : 4 = 2 : 1 = 2$; $\frac{1}{2}:\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$;

$3 : 10 = \frac{3}{10}$; $2,1 : 7 = 0,3 : 1 = \frac{3}{10}$; $3 : 0,3 = 10 : 1 = 10.$

Từ đó, ta được:

$28 : 14 = 8 : 4$; $3 : 10 = 2,1 : 7.$

Ví dụ 3: (Bài 46/tr 26 – Sgk): *Tìm* x *trong các tỉ lệ thức sau:*

a. $\frac{x}{27} = \frac{-2}{3,6}.$ b. $-0,52 : x = -9,36 : 16,38.$ c. $\frac{4\frac{1}{4}}{2\frac{7}{8}} = \frac{x}{1,61}.$

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi:

$$\frac{x}{27} = -\frac{20}{36} \Leftrightarrow \frac{x}{27} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{5.27}{9} = -15$$

Vậy, ta được x = –15.

b. Ta có biến đổi:

$$0.52 : x = 468 : 819 = 52 : 91 \Leftrightarrow \frac{0,52}{x} = \frac{52}{91} \Leftrightarrow x = \frac{91.0,52}{52} \Leftrightarrow x = \frac{91}{100}.$$

Vậy, ta được $x = \frac{91}{100}$.

c. Ta có biến đổi: $\frac{\frac{17}{4}}{\frac{23}{8}} = \frac{x}{1,61} \Leftrightarrow \frac{34}{23} = \frac{x}{1,61} \Leftrightarrow x = \frac{34.1,61}{23} = \frac{34.161}{23.100} = \frac{119}{50}$.

Vậy, ta được $x = \frac{119}{50}$.

Ví dụ 4: *Tìm hai số* x, y, *biết rằng*:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $2x - y = 3$. b. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 10$.

Giải

a. Từ dãy tỉ số: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{-y}{-5} = \frac{2x - y}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3$

Từ đó, suy ra: $x = 2.(-3) = -6$, $y = 5(-3) = -15$,

Vậy, ta được nghiệm $x = -6$, $y = -15$.

b. Đặt dãy tỉ số: $k = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 2k$ và $y = 5k$.

Khi đó, với giả thiết: $xy = 10 \Leftrightarrow 2k.5k = 10 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Ta lần lượt:

- Với $k = 1$, ta nhận được các nghiệm $x = 2$, $y = 5$.
- Với $k = -1$, ta nhận được các nghiệm $x = -2$, $y = -5$.

Vậy, bài toán có hai bộ nghiệm là $x = 2$, $y = 5$ hoặc $x = -2$, $y = -5$.

Nhận xét: Như vậy, với dạng toán "*Tìm các số* x, y, z, ... *thoả mãn*:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots \text{ và } k_1x + k_2y + k_3z + \ldots = S \text{"}$$

chúng ta thực hiện như sau:

Từ dãy tỉ số:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3} = \ldots = \frac{k_1x + k_2y + k_3z + \ldots}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \ldots}$$

$$= \frac{S}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \ldots}$$

Từ đó, ta nhận được các giá trị của x, y, z, ...

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC *có chu vi bằng* 22cm *và các cạnh* a, b, c *của tam giác tỉ lệ với các số* 2, 4, 5. *Tính độ dài các cạnh của tam giác.*

✍ *Giải*

Từ giả thiết ta có:

$a + b + c = 22cm,$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2.$$

Từ đó, suy ra: $a = 2.2 = 4$, $b = 4.2 = 8$, $c = 5.2 = 10$.

Vậy, ta được số đo các cạnh của tam giác là a = 4cm, b = 8cm, c = 10cm.

Ví dụ 6: *Tìm ba số* x, y, z, *biết rằng:* $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + 2y - 3z = -20$.

✍ *Giải*

Từ dãy tỉ số: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2y}{2.3} = \frac{-3z}{-3.4} = \frac{x + 2y - 3x}{2 + 2.3 - 3.4} = \frac{-20}{-4} = 5$

Từ đó, suy ra:

$x = 2.5 = 10$, $y = 3.5 = 15$, $z = 4.5 = 20$.

Vậy, ta được nghiệm x = 10, y = 15, z = 20.

☛ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể bắt đầu với một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chuyển đổi biểu thức tổng về dạng bậc cao.

Cụ thể, ta thay $x + 2y - 3z = -20$ bằng:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650.$$

Khi đó, ta cần thực hiện phép chuyển đổi:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}.$$

Lưu ý: Trong trường hợp này bài toán sẽ có hai bộ nghiệm.

Hướng 2: Chuyển đổi dãy tỉ số thành các dãy tỉ số nhỏ.

Cụ thể: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$, $\quad \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow x = \frac{z}{2}$.

Khi đó, bài toán sẽ được phát biểu lại dưới dạng:

" *Tìm ba số* x, y, z, *biết rằng* $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}$, $x = \frac{z}{2}$ *và* $x + 2y - 3z = -20$".

Và, để giải bài toán này chúng ta cần sử dụng hai tỉ lệ thức đầu tiên để suy ra được dãy tỉ số $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ rồi tiếp tục thực hiện như trong ví dụ trên.

Ví dụ 7: *Tìm ba số* x, y, z, *biết rằng:* $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = -49$.

✍ *Giải*

Từ các dãy tỉ số: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{y}{15}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15}=\frac{z}{12}$,

Từ đó, ta nhận được dãy tỉ số:

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{12} \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{-y}{-15}=\frac{z}{12}=\frac{x-y+z}{10-15+12}=\frac{-49}{7}=-7$$

Từ đó, suy ra: $x = 10.(-7) = -70$, $y = 15.(-7) = -105$, $z = 12.(-7) = -84$.

Vậy, ta được nghiệm $x = -70$, $y = -105$, $z = -84$.

Ví dụ 8: *Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích* $450m^2$. *Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 20% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc* $\frac{1}{3}$ *diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận, phần vườn còn lại được chia cho hai lớp 7C và 7D với tỉ lệ* $\frac{2}{3}$. *Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.*

✍ *Giải*

Diện tích vườn lớp 7A nhận là: $450.\frac{20}{100} = 90\ (m^2)$.

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là: $450 - 90 = 360\ (m^2)$.

Diện tích vườn lớp 7B nhận là: $360.\frac{1}{3} = 120\ (m^2)$.

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhận là:

$$450 - (90 + 120) = 240\ (m^2).$$

Diện tích còn lại chia cho hai lớp 7C và 7D theo tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

Gọi diện tích vườn chia cho lớp 7C là a, khi đó:

- Diện tích vườn chia cho lớp 7D là $240 - a$, ta có:

$$\frac{a}{240-a}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3a = 2(240-a) \Leftrightarrow a = \frac{2.240}{5} \Leftrightarrow a = 96\ (m^2).$$

- Diện tích vườn chia cho lớp 7D là: $240 - a = 240 - 96 = 144\ (m^2)$.

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là $90m^2$, cho lớp 7B là $120\ m^2$, cho lớp 7C là $96\ m^2$, cho lớp 7D là $144m^2$.

Ví dụ 9: *Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(a - b \neq 0$ *và* $c - d \neq 0)$ *ta có thể suy ra tỉ lệ thức* $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Giải

Theo tính chất 1, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Theo tính chất 2, ta có: $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Theo tính chất 3, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (c+d)(a-b)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \text{ đpcm.}$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a. $\frac{x}{52} = \frac{-14}{72}$.

b. $\frac{-x}{120} = \frac{7,2}{70}$.

c. $\frac{2\frac{2}{3}}{5} = \frac{x}{8,5}$.

d. $\frac{1\frac{2}{5}}{8} = \frac{x}{-9,5}$.

Bài 2: Tìm hai số x, y, biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $4x - 3y = -2$.

b. $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$ và $xy = 20$.

Bài 3: Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + y + z = 9$.

b. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ và $x + 2y - 3z = -14$.

Bài 4: Tìm các số a, b, c biết:

a. $a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ và $15a - 5b + 3c = 45$.

b. $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4}$ và $3a - 2b + c = 105$.

Bài 5: Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $x - 2y + 3z = 19$.

b. $\frac{x}{1} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $4x + y - z = 16$.

Bài 6: Tìm ba số x, y, z, biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 - y^2 + 2z^2 = 108$.

Bài 7: Tính số học sinh lớp 8A và lớp 9A, biết rằng lớp 9A nhiều hơn lớp 8A là 5 học sinh và tỉ số học sinh của hai lớp là 9 : 8.

Bài 8: Năm lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích $500m^2$. Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 25% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc $\frac{1}{3}$ diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận, phần vườn còn lại được chia cho ba lớp 7C, 7D và 7E với tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

Bài 9: Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($c + d \neq 0$ và $c - d \neq 0$) ta có thể suy ra tỉ lệ thức $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Bài 10: Chứng minh rằng nếu:

$$(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$$

thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}$.

Bài 11: Tìm một số có 3 chữ số. Biết số đó chia hết cho 6 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1, 2, 5.

Bài 12: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của ΔABC.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a. $x = \frac{-91}{9}$ c. $x = \frac{68}{15}$

c. $x = \frac{-432}{35}$ d. $x = \frac{-133}{80}$

Bài 2: a. $x = 4, y = 6$. b. $x = 4, y = 5$ hoặc $x = -4, y = -5$.

Bài 3: a. $x = 2, y = 3, z = 4$. b. $x = 6, y = 8, z = 12$.

Bài 4:

a. Ta có $a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \Leftrightarrow b = 3a$ và $c = 5a$.

Thay b và c vào $15a - 5b + 3c = 45$, ta được:

$15a - 5.3a + 3.5a = 45 \Leftrightarrow 15a = 45 \Leftrightarrow a = 3$.

Với $a = 3 \Rightarrow b = 9$ và $c = 15$.

Vậy, $a = 3, b = 9, c = 15$.

b. Ta có: $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3(a+1)}{2} - 2$ và $c = 2(a+1) - 2$

$\Leftrightarrow b = \frac{3a-1}{2}$ và $c = 2a$.

Thay b và c vào $3a - 2b + c = 105$, ta được:

$$3a - 2\frac{3a-1}{2} + 2a = 105 \Leftrightarrow 3a - (3a-1) + 2a = 105 \Leftrightarrow a = 52.$$

Với $a = 52 \Rightarrow b = \frac{155}{2}$ và $c = 104$.

Vậy, $a = 52$, $b = \frac{155}{2}$, $c = 104$.

Bài 5: a. $x = 4, y = 6, z = 9$. b. $x = 6, y = 24, z = 32$.

Bài 6: $x = 4, y = 6, z = 8$ hoặc $x = -4, y = -6, z = -8$.

Bài 7: Lớp 8A có 40 học sinh và lớp 9A có 45 học sinh.

Bài 8: Ta lần lượt:

- Diện tích vườn lớp 7A nhận là $500.\frac{25}{100} = 125\ (m^2)$.
- Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là $500 - 125 = 375\ (m^2)$.
- Diện tích vườn lớp 7B nhận là $375.\frac{1}{3} = 125\ (m^2)$.
- Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhận là:
  $500 - (125 + 125) = 250\ (m^2)$.
- Diện tích còn lại chia cho ba lớp 7C, 7D và 7E theo tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$.

Gọi diện tích vườn chia cho lớp 7C, 7D, 7E là a, b, c. Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} \\ a+b+c = 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} = \dfrac{a+b+c}{\frac{3}{2}+\frac{9}{5}+\frac{17}{10}} \\ a+b+c = 250 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} = \dfrac{250}{\frac{3.5+9.2+17}{10}} = 50 \\ a+b+c = 250 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 50.\frac{3}{2} = 75(m^2)\ ;\ b = 50.\frac{9}{5} = 90(m^2)\ ;\ c = 50.\frac{17}{10} = 85(m^2).$$

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là $125m^2$, cho lớp 7B là $125\ m^2$, cho lớp 7C là $75\ m^2$, cho lớp 7D là $90m^2$, cho lớp 7E là $85\ m^2$.

Bài 9: Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Vậy, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ $(c + d \neq 0$ và $c - d \neq 0)$.

Bài 10: Ta có: $(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c-d}{a+b-c+d} = \frac{a-b+c+d}{a-b-c-d} \Leftrightarrow \frac{(a+b)+(c-d)}{(a+b)-(c-d)} = \frac{(a-b)+(c+d)}{(a-b)-(c+d)}.$$

Đặt $A = a + b$; $B = c - d$; $C = a - b$; $D = c + d$. Ta được:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c-d} = \frac{a-b}{c+d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Vậy, ta được:

$$(a+b+c-d)(a-b-c-d) = (a+b-c+d)(a-b+c+d) \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Bài 11: Giả sử số cần tìm là $\overline{abc}$ với $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b, c \leq 9$.

Do đó:

$1 \leq (a + b + c) \leq 27$.

Vì số cần tìm chia hết cho $6 = 3 \times 2$ nên $(a + b + c) \vdots 3$ và c là số chẵn.

Suy ra, $a + b + c$ có thể nhận các giá trị: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Lại có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8} \Rightarrow a = \frac{a+b+c}{8}.$$

Vì a là một số nguyên nên $(a + b + c) \vdots 8$.

Vậy, $a + b + c$ chỉ có thể nhận giá trị: 24. Do đó:

c	0	2	4	6	8
a + b	24	22	20	18	16
a				9	7 ; 8 ; 9
b				9	9 ; 8 ; 7
$\overline{abc}$				996	798 ; 888 ; 978

Vậy, có 4 số cần tìm 996, 798, 888, 978.

Bài 12: Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{1+2+3} = \frac{180}{6} = 30^0.$$

Từ đó, suy ra: $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

CHỦ ĐỀ 7

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN
SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN
LÀM TRÒN SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN – SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

Ta có thể viết:

$$\frac{5}{20} = 0{,}4, \quad \frac{12}{5} = 2{,}4, \qquad (1)$$

$$\frac{20}{3} = 6{,}66666\ldots = 6{,}(6);$$

$$\frac{11}{45} = 0{,}24444\ldots = 0{,}2(4) \qquad (2)$$

☛ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Các số thập phân như ở (1) được gọi là các số *thập phân hữu hạn.*
- Các số thập phân như ở (2) được gọi là các số *thập phân vô hạn tuần hoàn.*
- Ta nói:

  6,(6) là một số thập phân vô hạn tuần hoàn có *chu kì* là 6.

  0,2(4) là một số thập phân vô hạn tuần hoàn có *chu kì* là 4.
- Mỗi số hữu tỉ đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ngược lại mỗi số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn đều biểu diễn được dưới dạng một số hữu tỉ.

Người ta chứng minh được:

a. Nếu một phân số **tối giản** với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng **số thập phân hữu hạn.**

b. Nếu một phân số **tối giản** với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng **số thập phân vô hạn tuần hoàn.**

2. LÀM TRÒN SỐ

Ta có quy tắc làm tròn số như sau:

- Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta hay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

- Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

☞ *Chú ý*: Để làm tròn giá trị của một biểu thức đến hàng cho trước ta thường làm tròn các số và các kết quả trung gian đến hàng kế tiếp sau hàng đó, đến kết quả cuối cùng mới làm tròn đến đúng hàng đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:*

$$\frac{1}{9}\ ;\ \frac{12}{99}\ ;\ \frac{123}{999}\ ;\ \frac{1234}{9999}.$$

✍ *Giải*

Ta có: $\frac{1}{9} = 0,1111\ldots = 0,(1)$, $\frac{12}{99} = 0,121212\ldots = 0,(12)$,

$\frac{123}{999} = 0,123123\ldots = 0,(123)$, $\frac{1234}{9999} = 0,12341234\ldots = 0,(1234)$.

Tổng quát: Ta có:

$0,(a) = \frac{a}{9}$,

$0,(ab) = \frac{\overline{ab}}{99}$;

$0,(abc) = \frac{\overline{abc}}{999}$,

$0,(abcd) = \frac{\overline{abcd}}{9999}$,

$0,ab(cde) = \frac{\overline{abcde} - \overline{ab}}{99900}$.

Ví dụ 2: *Tính giá trị của phép tính* 8,673 : 5,829.

✍ *Giải*

- Làm tròn đến hàng đơn vị, ta có: $8,673 : 5,829 \approx 8,7 : 5,8 = 1,5 \approx 2$.
- Làm tròn đến số thập phân thứ hai, ta có:

$$8,673 : 5,829 \approx 8,67 : 5,83 = 1,487 \approx 1,49.$$

Ví dụ 3: *Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:*

a. $A = 124,74 + 345,95 - 264,034$.

b. $B = (35,043 - 4,724) . 12,395$.

c. $C = (324,083 - 142,724): 23,82$.

d. $D = 43,203 + 31,024 - 52,341$.

✍ *Giải*

a. Ta được: $A = 124,74 + 345,95 - 264,034 = 206,656 \approx 206,66$.

b. Ta được: $B = (35{,}043 - 4{,}724) \,.\, 12{,}395 = 30{,}319 \,.\, 12{,}395 \approx 375{,}804 \approx 375{,}8$.

c. Ta được: $C = (324{,}083 - 142{,}724) : 23{,}82 = 181{,}359 : 23{,}82 \approx 7{,}614 \approx 7{,}61$.

d. Ta được: $D = 43{,}203 + 31{,}024 - 52{,}341 = 21{,}886 \approx 21{,}89$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân: $\frac{1}{99}$; $\frac{1}{999}$; $\frac{1}{9999}$.

Bài 2: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân: $\frac{4}{9}$; $\frac{13}{99}$; $\frac{41}{999}$; $\frac{97}{9999}$.

Bài 3: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{-8}{9} ; \frac{1}{125} ; \frac{3}{80} ; \frac{-4}{15} ; \frac{5}{27} ; \frac{13}{14}.$$

Bài 4: Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản:

0,(8) ; 1,(25) ; – 2,(38) ; 7,21(321) ; 5,(8218).

Bài 5: Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản:

0,(6) ; 4,(75) ; – 6,(81) ; 8,24(25) ; 7,(8182).

Bài 6: Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:

a. $A = 4{,}2374 + 5{,}1295 - 6{,}1048$. b. $B = (51{,}0431 - 14{,}825) \,.\, 2{,}635$.

c. $C = (34{,}1086 - 42{,}2749) : 3{,}821$. d. $D = 73{,}2038 + 51{,}527 - 42{,}1341$.

Bài 7: Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:

a. $A = 3{,}334 + 4{,}258 - 8{,}818$. b. $B = (23{,}033 - 4{,}255) \,.\, 4{,}65$.

c. $C = (43{,}846 - 2{,}744) : 3{,}21$.

Bài 8: Tính đến hết học kì I, điểm toán của bạn Hoa như sau:

- Điểm hệ số 1 (kiểm tra miệng và 15’): 9, 6, 10.
- Điểm hệ số 2 (kiểm tra 45’): 6, 7, 9.
- Điểm kiểm tra học kì: 8.

Em hãy tính điểm trung bình môn toán học kì I của bạn Hoa (chính xác đến số thập phân thứ hai).

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 4: Ta được: $0{,}(8) = \frac{8}{9}$; $1{,}(25) = 1\frac{25}{99}$; $-2{,}(38) = -2\frac{38}{99}$;

$$7{,}21(321) = 7\frac{21321 - 21}{99900} = 7\frac{71}{333} \ ; \ 5{,}(8218) = 5\frac{8218}{9999}.$$

Bài 6: $A \approx 3{,}26$; $B \approx 95{,}43$; $C \approx -2{,}14$; $D \approx 82{,}6$.

Bài 8: Điểm trung bình kiểm tra của bạn Hoa là: $\frac{9 + 6 + 10 + 2(6 + 7 + 9)}{9} \approx 7{,}67$.

Điểm trung bình học kì I của bạn Hoa là: $\frac{7{,}67.2 + 8}{3} \approx 7{,}78$.

Vậy, điểm trung bình môn toán học kì I của bạn Hoa là 7,78.

CHỦ ĐỀ 8

SỐ VÔ TỈ

KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. SỐ VÔ TỈ

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Kí hiệu: Tập hợp số vô tỉ là **I**.

2. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

Căn bậc hai của một số a **không âm** là số x sao cho $x^2 = a$.

☞ ***Chú ý***: Ta thấy:

- Số dương a có đúng 2 căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 chỉ có duy nhất một căn bậc hai là 0 vì $\sqrt{0} = 0$.
- Số âm không có căn bậc hai.
- Không được viết: $\sqrt{a^2} = \pm a$.
- Ta có: $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$.

  Với hai số bất kì a, b với a, b > 0. Ta có:

  $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$; $a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.

3. SỐ THỰC

Số vô tỉ và số hữu tỉ được gọi chung là ***số thực***. Kí hiệu: Tập hợp số thực là **R**.

☞ ***Chú ý***: Ta thấy:

- Với hai số thực x, y bất kì, ta luôn có: x = y hoặc x > y hoặc x < y.
- Việc so sánh, tính toán trên hai số thực được thực hiện tương tự như so sánh, tính toán các số hữu tỉ viết dưới dạng thập phân.
- Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm duy nhất trên trục số. Ngược lại mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực duy nhất. Vì thế, trục số còn được gọi là trục số thực.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Tìm căn bậc hai của các số sau:*

a. 81 ; $(-9)^2$; 9^2 ; 0,81.

b. 5 ; 0,2 ; n^2 ($n \in \mathbb{Q}$).

c. – 101 ; 95 ; 1

d. n + 1 ($n \in \mathbb{N}$).

✍ *Giải*

a. Ta có: $81 = (-9)^2 = 9^2$. $0,81 = (0,9)^2 = (-0,9)^2$.

Vậy, ta được:

- Các số 81 ; $(-9)^2$; 9^2 có hai căn bậc hai là 9 và – 9.

- Số 0,81 có hai căn bậc hai là 0,9 và – 0,9.

b. Ta có: $5 = (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$; $0,2 = (\sqrt{0,2})^2 = (-\sqrt{0,2})^2$; $n^2 = (-n)^2$.

Vậy, ta được:

- Số 5 có hai căn bậc hai là $\sqrt{5}$ và $-\sqrt{5}$.
- Số 0,2 có hai căn bậc hai là $\sqrt{0,2}$ và $-\sqrt{0,2}$.
- Số n^2 ($n \in \mathbb{Q}$) có hai căn bậc hai là n và – n.

c. Ta có: $-101 < 0$; $95 = (\sqrt{95})^2 = (-\sqrt{95})^2$; $1 = (1)^2 = (-1)^2$.

Vậy, ta được:

- Số –101 không có căn bậc hai.
- Số 95 có hai căn bậc hai là $\sqrt{95}$ và $-\sqrt{95}$.
- Số 1 ($n \in \mathbb{Q}$) có hai căn bậc hai là 1 và –1.

d. Ta có: $n + 1 \geq 1$; $n + 1 = (\sqrt{n+1})^2 = (-\sqrt{n+1})^2$.

Vậy, số n + 1 ($n \in \mathbb{N}$) có hai căn bậc hai $\sqrt{n+1}$ và $-\sqrt{n+1}$.

Ví dụ 2: *Tính giá trị của các đẳng thức sau:*

a. $A = \sqrt{\frac{11}{25} + 1} - \sqrt{20}\left(\sqrt{\frac{1}{80}} - \frac{1}{3\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{6}$.

b. $B = 2\sqrt{\frac{0,01}{1,21}} + 3\frac{2}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 40}} - \frac{3}{4}$.

Giải

a. Ta có: $A = \sqrt{\frac{11+25}{25}} - \sqrt{\frac{20}{80}} + \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9.10}} + \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{36}{25}} - \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2.10}}{\sqrt{9.10}} + \frac{1}{6}$

$= \frac{6}{5} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} = \frac{13}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{13 + 5\sqrt{2}}{15}$.

b. Ta có: $B = 2\sqrt{\frac{1}{121}} + 3\frac{2}{\sqrt{100+4+40}} - \frac{3}{4} = 2\sqrt{\frac{1}{11^2}} + 3\frac{2}{\sqrt{100+4+40}} - \frac{3}{4}$

$= \frac{2}{11} + \frac{6}{\sqrt{144}} - \frac{3}{4} = \frac{2}{11} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{44}$

Ví dụ 3: *So sánh hai số:*

a. $m = \sqrt{9+25}$ và $n = \sqrt{9} + \sqrt{25}$.

b. $p = \sqrt{49-16}$ và $q = \sqrt{49} - \sqrt{16}$.

c. $\sqrt{0,04}$ và 0,04.

d. 8 và $\sqrt{8}$.

Giải

a. Ta có: $m = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$, $n = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8 = \sqrt{64}$

Vậy, ta được m < n.

b. Ta có: $p = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$; $q = \sqrt{49} - \sqrt{16} = 7 - 4 = 3 = \sqrt{9}$.

Vậy, ta được p > q.

c. Ta có: $\sqrt{0,04} = 0,2 > 0,04$. Vậy, ta được $\sqrt{0,04} > 0,04$.

d. Ta có $\sqrt{8} = \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2} < 8$. Vậy, ta được $\sqrt{8} < 8$.

Từ những kết quả trên ta rút ra một số nhận xét sau:

☞ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Với a, b > 0, ta có: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Với a, b > 0, a > b, ta có: $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
- Với $0 < a < 1$, ta có: $a < \sqrt{a}$.
- Với $a > 1$, ta có: $a > \sqrt{a}$.

Ví dụ 4: *Tìm x biết*:

a. $x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9$. b. $2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19$.

c. $5\sqrt{x} + 2x - 8 = 5x + 4 - 3x - 19$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 5x + 25$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 5x = 25 - 6 \Leftrightarrow x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{19}$.

Vậy, ta được $x = \sqrt{19}$ và $x = -\sqrt{19}$.

b. Ta có: $2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 8x + 5 = 8x + 15$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy, ta được x = 25.

c. Ta có: $5\sqrt{x} + 2x - 8 = 5x + 4 - 3x - 19 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} + 2x - 8 = 2x - 15$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x} = -7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{7}{5} < 0$. Vậy, không có giá trị nào của x.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm căn bậc hai của các số sau:

a. 25 ; $(-7)^2$; 193^2 ; 0,16.

b. 65 ; 0,21.

c. – 100 ; 175 ; 125

d. $(n-2)^2$ ($n \in \mathbb{Q}$) ; $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 2: Hãy tính:

a. $\sqrt{64}$.

b. $\sqrt{\frac{25}{64}}$.

c. $-\sqrt{(-7)^2}$.

d. $-\sqrt{\frac{49}{16}+2}$.

Bài 3: So sánh hai số sau:

a. $-\sqrt{64}$ và $-\sqrt{65}$.

b. 8 và $\sqrt{(-8)^2}$.

c. $\sqrt{(-7)^2}$ và 6.

d. $\sqrt{\frac{74}{25}-1}$ và $\frac{6}{5}$.

Bài 4: So sánh hai số sau:

a. $-\sqrt{64+15}$ và $-\sqrt{15} - 8$.

c. $\sqrt{54}$ và $9 - \sqrt{27}$.

b. $7 + \sqrt{(-9)^2}$ và $\sqrt{103}$.

d. $\sqrt{\frac{81}{25} - \frac{2}{7}}$ và $\frac{9}{5} - \frac{2}{7}$.

Bài 5: Tìm x biết:

a. $2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = x^2 + 3x + 35 + x^2 + 2x - 7$.

b. $3\sqrt{x} + 7x + 5 = \sqrt{x} + 4x - 6 + 3x + 18$.

c. $8\sqrt{x} + 2x - 9 = 5x + 7 + 6\sqrt{x} - 3x - 2$.

d. $2\sqrt{3x} + 11x - 18 = 5x + 2 + 6\sqrt{3x} + 6x - 21$.

Bài 6: Tìm x biết:

a. $4{,}15x + 8{,}37x - 35 = -14{,}92$.

b. $7{,}53x + 5{,}82x + 17{,}24 = 52{,}25$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Học sinh tự làm các câu a, b, c .

d. Ta có: $(n-2)^2 \geq 0$ ($n \in \mathbf{Q}$) ; $n - 1 \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Vậy, ta được:

– Số $(n-2)^2$ có hai căn bậc hai là $n - 2$ và $2 - n$.

– Số $n - 1$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{n-1}$ và $-\sqrt{n-1}$.

Bài 2:

a. Ta có: $\sqrt{64} = 8$.

b. Ta có: $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

c. Ta có: $-\sqrt{(-7)^2} = -\sqrt{49} = -7$

d. Ta có: $-\sqrt{\frac{49}{16} + 2} = -\sqrt{\frac{49 + 2.16}{16}} = -\sqrt{\frac{81}{16}} = -\frac{9}{4}$.

Bài 3:

a. Ta có: $64 < 65 \Leftrightarrow \sqrt{64} < \sqrt{65} \Leftrightarrow -\sqrt{64} > -\sqrt{65}$.

b. Ta có: $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$.

c. Ta có: $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 > 6$.

d. Ta có: $\sqrt{\frac{74}{25} - 1} = \sqrt{\frac{74 - 25}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} > \frac{6}{5}$.

Bài 5:

a. Ta có: $2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = 2x^2 + 5x + 28 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 20 \Leftrightarrow x = 400$.

b. Ta có: $3\sqrt{x} + 7x + 5 = \sqrt{x} + 7x + 12 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = \frac{49}{4}$.

c. Ta có: $8\sqrt{x} + 2x - 9 = 2x + 6\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow x = 49$.

d. Ta có: $2\sqrt{3x} + 11x - 18 = 11x + 6\sqrt{3x} - 19 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{48}$.

CHƯƠNG II – HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

CHỦ ĐỀ 1

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức:

y = kx, với k là hằng số khác 0

thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

☞ ***Nhận xét***: Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là: $y = kx \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}y$

Tức là:

- x cũng tỉ lệ thuận với y, do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ thuận với nhau.
- x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

2. TÍNH CHẤT

Nếu hai đại lượng x, y tỉ lệ thuận với nhau (tức là y = kx) thì:

1. Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = \frac{y_n}{x_n} = k,$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k}.$$

2. Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia, tức là: $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_m}{y_n}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* y *tỉ lệ thuận với* x *theo hệ số tỉ lệ* k = 2.

a. *Hãy biểu diễn* y *theo* x.

b. *Hỏi* x *tỉ lệ thuận với* y *theo hệ số tỉ lệ nào ?*

✍ *Giải*

a. Ta có ngay y = 2x.

b. Từ nhận xét trên, suy ra: " x *tỉ lệ thuận với* y *theo hệ số tỉ lệ bằng* $\frac{1}{2}$ ".

Ví dụ 2: (Bài 1/tr 53 – Sgk): *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *tỉ lệ thuận với nhau và khi* x = 6 *thì* y = 4.

a. *Tìm hệ số tỉ lệ* k *của* y *đối với* x.

b. *Hãy biểu diễn* y *theo* x.

c. *Tính giá trị của* y *khi* x = 9, x = 15.

✍ *Giải*

a. Ta có: $y = kx \Rightarrow k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

b. Từ kết quả câu a), ta được $y = \dfrac{2}{3}x$.

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	9	15
$y = \dfrac{2}{3}x$	6	10

☞ ***Nhận xét***: Với bảng biểu diễn trong câu c), ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp người ta thường cho bài toán dưới dạng "*Cho biết* x *và* y *là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo*". Ví dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể nhận xét này.

Ví dụ 3: *Cho biết* x *và* y *là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:*

x	–2	–1	3	
y		3		–27

✍ *Giải*

Vì x và y tỉ lệ thuận với nhau, giả sử: $y = kx \Rightarrow k = \dfrac{y}{x}$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra: $k = \dfrac{3}{-1} = -3 \Rightarrow y = -3x$.

Khi đó, ta viết y = –3x vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	–2	–1	3	9
y = –3x	6	3	–9	–27

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, hai ví dụ đã qua chỉ đi sâu khai thác tính chất đầu tiên của hai đại lượng tỉ lệ thuận. Một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên là "*Tính chất thứ hai được sử dụng để làm gì ?*" Câu trả lời sẽ là "*Nó được sử dụng trong dạng toán thực nghiệm*", tức là:

"*Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không ?*".

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó:

- Nếu các giá trị $\frac{y}{x}$ không đổi, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.
- Ngoài ra, kết luận x và y không tỉ lệ thuận với nhau.

Ví dụ 4: *Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:*

x	−2	−1	3	5
y	4	2	−6	−10

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không ? Vì sao ?

✍ *Giải*

Thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	−2	−1	3	5
y	4	2	−6	−10
$\frac{y}{x}$	−2	−2	−2	−2

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.

Vấn đề 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Ví dụ 1: *Chu vi của hình chữ nhật bằng 28cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4.*

✍ *Giải*

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a, b (a < b).

Từ giả thiết ta có: $2(a + b) = 28cm \Leftrightarrow a + b = 14cm.$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{3+4} = \frac{14}{7} = 2.$$

Từ đó, suy ra a = 6cm và b = 8cm.

☞ ***Nhận xét:*** Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát:

" *Tìm hai đại lượng tỉ lệ thuận x, y thoả mãn điều kiện K cho trước* "

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa vào điều kiện K, thiết lập biểu thức:

$$S = k_1x + k_2y.$$

Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x và y, ta có:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} \Rightarrow \frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_1x + k_2y}{k_1a_1 + k_2a_2}$$

Từ đây, chúng ta nhận được x và y.

Ví dụ 2: (Bài toán 2/tr 55 – Sgk): *Cho* ΔABC *có số đo các góc* $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ *lần lượt tỉ lệ với* 1, 2, 3. *Tính số đo các góc của* ΔABC.

✍ *Giải*

Trong ΔABC, ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Từ giả thiết ta có: $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180^0}{6} = 30^0$.

Từ đó, suy ra $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát:

   "*Tìm ba đại lượng tỉ lệ thuận x, y, z thoả mãn điều kiện K cho trước*"

   Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Dựa vào điều kiện K, thiết lập biểu thức: $S = k_1x + k_2y + k_3z$.

   Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x, y và z, ta có:

   $$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} \Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3} = \frac{k_1x + k_2y + k_3z}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3}.$$

   Từ đây, chúng ta nhận được x, y và z.

2. Và, thông qua hai bài toán này chúng ta có được phương pháp giải trong trường hợp cần tìm n đại lượng tỉ lệ thuận x, y, z, t, ...

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{3}{4}$.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào ?

Bài 2: Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi x = – 2 thì y = 8.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = – 2, x = – 1, x = 2, x = 6.

Bài 3: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	– 12	– 6	– 3	3	9		
y				1		5	9

Bài 4: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	– 8	– 6	2	4
y	16	12	– 4	– 8

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không ? Vì sao ?

Bài 5: Chu vi của hình chữ nhật bằng 28cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 2, 5.

Bài 6: Tính độ dài mỗi cạnh của hình chữ nhật, biết hai cạnh tỉ lệ với 1, 3 và cạnh lớn dài hơn cạnh nhỏ là 8cm.

Bài 7: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 4, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài 8: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài 9: Cho ΔABC có chu vi bằng 22cn và các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 2, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Bài 10: Cho ΔABC có các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 3, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác, biết rằng cạnh lớn nhất dài hơn cạnh nhỏ nhất 6cm.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Ta có $y = -\frac{3}{4}x$.

b. x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bằng $-\frac{4}{3}$.

Bài 2:

a. Ta có: $y = kx \Rightarrow k = \frac{y}{x} = \frac{8}{-2} = -4$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $y = -4x$.

b. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	– 2	– 1	2	6
y = – 4x	8	4	– 8	– 24

Bài 3: Ta có kết quả:

x	– 12	– 6	– 3	3	9	15	27
$y = \frac{1}{3}x$	– 4	– 2	– 1	1	3	5	9

Bài 4: x và y tỉ lệ thuận với nhau.

Bài 5: Gọi a, b (a < b) là hai cạnh của hình chữ nhật, ta được a = 4cm, b = 10cm.

Bài 7: Trong ΔABC, ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Từ giả thiết ta có: $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{1+4+7} = \frac{180}{12} = 15^0$.

Từ đó, suy ra: $\hat{A} = 15^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 105^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 15^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 105^0$.

Bài 9: Từ giả thiết ta có:

$$a + b + c = 22cm,\ \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2.$$

Từ đó, suy ra: a = 2.2 = 4, b = 4.2 = 8, c = 5.2 = 10.

Vậy, ta được độ dài các cạnh của tam giác là a = 4cm, b = 8cm, c = 10cm.

Bài 10: Từ giả thiết ta có: $c - a = 6cm,\ \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{c-a}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$.

Từ đó, suy ra: a = 3.3 = 9, b = 4.3 = 12, c = 5.3 = 15.

Vậy, ta được độ dài các cạnh của tam giác là a = 9cm, b = 12cm, c = 15cm.

CHỦ ĐỀ 2

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{k}{x}$ (hoặc xy = k), với k là hằng số khác 0, thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k.

☛ ***Nhận xét***: Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là: $xy = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{y}$.

Tức là:

- x cũng tỉ lệ nghịch với y, do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ nghịch với nhau.
- x tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ k. Do đó, trong tỉ lệ nghịch ta không phân biệt cách phát biểu " *hệ số tỉ lệ của y đối với x* " với " *hệ số tỉ lệ của x đối với y* " mà thường gọi chung là hệ số tỉ lệ.

2. TÍNH CHẤT

Nếu hai đại lượng x, y tỉ lệ nghịch với nhau (tức là $y = \frac{k}{x}$) thì:

1. Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là:
$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \ldots = x_ny_n = k,$$
2. Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia, tức là: $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}$.
3. **(Quan trọng)**: Nếu ta viết: $y = k.\frac{1}{x}$

Ta có tương ứng mới "y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$ theo hệ số tỉ lệ bằng k "

☛ ***Nhận xét***: Với " *dạng toán thực nghiệm* ", tức là "*Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau không ?*".

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó:

- Nếu các giá trị xy không đổi, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.
- Ngược lại, kết luận x và y không tỉ lệ nghịch với nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* x *và* y *tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ* $k = \frac{1}{2}$.

a. *Hãy biểu diễn* y *theo* x.

b. *Tính giá trị của* y *khi* $x = -\frac{1}{16}$.

Giải

a. Ta có ngay: $xy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$.

b. Với $x = -\frac{1}{16}$, ta có ngay $y = -8$.

Ví dụ 2: (Bài 12/tr 58 – Sgk): *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *tỉ lệ nghịch với nhau và khi* $x = 8$ *thì* $y = 15$.

a. *Tìm hệ số tỉ lệ* k.

b. *Hãy biểu diễn* y *theo* x.

c. *Tính giá trị của* y *khi* $x = 6$, $x = 10$.

Giải

a. Ta có: $xy = k \Rightarrow k = 8.15 = 120$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $xy = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{x}$.

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	6	10
$y = \frac{120}{x}$	20	12

Nhận xét: Với bảng biểu diễn trong câu c), ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp người ta thường cho bài toán dưới dạng "*Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo*". Ví dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể nhận xét này.

Ví dụ 3: (Bài 13/tr 58 – Sgk): *Cho biết* x *và* y *là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:*

x	0,5	−1,2			4	6
y			3	− 2	1,5	

Giải

Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau, giả sử: $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 5, ta suy ra: $k = 4.1,5 = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$.

Khi đó, ta viết $y = \frac{27}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	0,5	−1,2	2	−3	4	6
$y = \frac{6}{x}$	12	−5	3	−2	1,5	1

☞ ***Nhận xét***: Với *"dạng toán thực nghiệm"*, tức là:

"Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau không ?".

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó:

- Nếu các giá trị xy không đổi, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.
- Ngoài ra, kết luận x và y không tỉ lệ nghịch với nhau.

Ví dụ 4: *Các giá trị tương ứng của* x *và* y *được cho trong bảng*:

x	−2	−1	4	8
y	−8	−16	4	2

Hai đại lượng x *và* y *có tỉ lệ nghịch với nhau hay không ? Vì sao ?*

✍ *Giải*

Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	−2	−1	4	8
y	−8	−16	4	2
xy	16	16	16	16

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

Vấn đề 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Ví dụ 1: *Một ôtô đi từ* A *đến* B *với vận tốc* 60km/h *và trở về* A *với vận tốc* 48km/h. *Cả đi lẫn về* (*không tính thời gian nghỉ*) *mất* 13h30'. *Tính độ dài quãng đường* AB.

✍ *Giải*

Giả sử:

- Ôtô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h với thời gian là t_1 (h).
- Ôtô đi từ B về A với vận tốc 48km/h với thời gian là t_2 (h).

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cũng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên: $\frac{60}{48} = \frac{t_2}{t_1} \Leftrightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}$. (1)

Theo giả thiết, ta có: $t_1 + t_2 = 13h30' = 13\frac{1}{2}$.

Khi đó, từ dãy tỉ số (1), ta được: $\frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{4+5} = \frac{13\frac{1}{2}}{9} = \frac{3}{2} \Rightarrow t_1 = 6h.$

Vậy độ dài quãng đường AB là 60.6 = 360km.

☞ ***Nhận xét:***

1. Rất nhiều em học sinh sẽ mắc phải lỗi không đáng có khi thực hiện phép đổi đơn vị 13h30' thành số thập phân.
2. Nếu sử dụng tính chất 3, ta có thể lập luận:

   Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cùng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên t_1, t_2 tỉ lệ với $\frac{1}{60}, \frac{1}{48}$, suy ra:

   $$\frac{t_1}{\frac{1}{60}} = \frac{t_2}{\frac{1}{48}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}.$$

   Bước biến đổi này sẽ thực sự có ích khi cần tìm nhiều đại lượng.
3. Nếu không muốn sử dụng dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta có thể trình bày lời giải trên theo cách:

   Lập luận tương tự như trong bài toán để có: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4t_2 = 5t_1$.

   Theo giả thiết, ta có:

   $$t_1 + t_2 = 13h30' = 13,5 \Leftrightarrow 4(t_1 + t_2) = 4.13,5$$
   $$\Leftrightarrow 4t_1 + 4t_2 = 54 \Leftrightarrow 4t_1 + 5t_1 = 54 \Leftrightarrow t_1 = 6.$$

   Vậy độ dài quãng đường AB là 60.6 = 360km.
4. Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát "*Tìm đại lượng x, biết x tỉ lệ nghịch với y và thoả mãn điều kiện K cho trước*". Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Xác định mối quan hệ giữa các đại lượng tỉ lệ nghịch, dựa trên công thức: $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}$

   Hoặc dựa trên tính chất 3.

   Bước 2: Khai thác điều kiện K và vận dụng linh hoạt kiến thức về dãy tỉ số bằng nhau (nếu cần). Từ đây, chúng ta nhận được x.

Ví dụ 2 *Ba nhóm học sinh cùng tham ra trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 3 ngày, nhóm II trồng xong trong 5 ngày, nhóm III trồng xong trong 6 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh, biết rằng nhóm thứ hai có nhiều hơn nhóm thứ ba 1 học sinh (năng suất trồng cây của mỗi học sinh bằng nhau).*

Giải

Giả sử, số học sinh của ba nhóm theo thứ tự là x, y, z.

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 3 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 5 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.

Theo giả thiết, ta có y – z = 1.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, suy ra: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{y-z}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30$.

Từ đó, suy ra: $x = \frac{1}{3}.30 = 10$, $y = \frac{1}{5}.30 = 6$, $z = \frac{1}{6}.30 = 5$.

Vậy, nhóm I có 10 học sinh, nhóm II có 6 học sinh và nhóm III có 5 học sinh.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ k = 16.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{4}$.

Bài 2: Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi x = 2 thì y = 9.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k.

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = – 2, x = 1, x = 3, x = 8.

Bài 3: Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi x = 4 thì y = 9.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k.

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = – 9, x = –6, x = 3, x = 12, x = 36.

Bài 4: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	– 20	– 12	2	3	4	5	
y		– 5					10

Bài 5: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	–9	–1		3
y		–27	27	

Bài 6: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không ? Vì sao ?

Bài 7: Một ôtô đi từ A đến B hết 6h. Hỏi khi từ B quay về A nó đi hết mấy giờ, biết rằng vận tốc lúc về bằng 1, 5 lần vận tốc lúc đi.

Bài 8: Biết 3 học sinh khi làm vệ sinh lớp học hết 3 phút. Hỏi 5 học sinh (cùng năng suất) sẽ làm vệ sinh lớp học hết bao nhiêu phút ?

Bài 9: 36 em học sinh chia làm bốn nhóm cùng tham ra trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 4 ngày, nhóm II trồng xong trong 6 ngày, nhóm III trồng xong trong 10 ngày, nhóm IV trồng xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh, biết rằng năng suất trồng câu của mỗi học sinh bằng nhau.

Bài 10: Hai ôtô cùng đi từ A đến B. Xe thứ nhất đi hết 1h20', xe thứ hai đi hết 1h30'. Tính vận tốc trung bình của mỗi xe, biết rằng trung bình 1 phút xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 100m.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $y = \frac{16}{x}$; $y = -64$.

Bài 2:

a. Ta có: $xy = k \Rightarrow k = 2.9 = 18$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $xy = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$.

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	– 2	1	3	8
$y = \frac{18}{x}$	– 9	18	6	$\frac{9}{4}$

Bài 3:

a. Ta có: $xy = k \Rightarrow k = 4.9 = 36$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $xy = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{x}$.

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	– 9	– 6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	– 4	– 6	12	3	1

Bài 4: Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau, giả sử $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra: $k = (-12)(-5) = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{x}$.

Khi đó, ta viết $y = \frac{60}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	– 20	– 12	2	3	4	5	6
$y = \frac{60}{x}$	– 3	– 5	30	20	15	12	10

Bài 5: Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau, giả sử $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra: $k = (-1)(-27) = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{x}$.

Khi đó, ta viết $y = \frac{27}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	–9	–1	1	3
$y = \frac{27}{x}$	–3	–27	27	9

Bài 6: Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5
xy	30	30	30	30

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

Bài 7: Giả sử:

- Ôtô đi từ A đến B với vận tốc v_1 và thời gian là $t_1 = 6$ (h).
- Ôtô đi từ B về A với vận tốc v_2 và thời gian là t_2 (h).

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cũng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2}{6} \Leftrightarrow t_2 = \frac{6v_1}{v_2}$. (1)

Theo giả thiết, ta có $v_2 = 1{,}5v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1{,}5}$. (2)

Thay (2) và (1), ta được $t_2 = 6.\frac{1}{1{,}5} = 4$h.

Vậy, với vẫn tốc mới khi quay về ôtô đi hết 4h.

Bài 9: Giả sử, số học sinh của bốn nhóm theo thứ tự là x, y, z, t.

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 4 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 10 ngày.
- Nhóm IV với t học sinh hoàn thành công việc trong 12 ngày.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, suy ra: $\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}}$. (1)

Theo giả thiết, ta có x + y + z + t = 36.

Khi đó, từ dãy tỉ số (1), ta được:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} = \frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}} = \frac{36}{\frac{36}{60}} = 60.$$

Từ đó, suy ra: $x = \frac{1}{4}.60 = 15$, $y = \frac{1}{6}.60 = 10$, $z = \frac{1}{10}.60 = 6$, $t = \frac{1}{12}.60 = 5$.

Vậy, nhóm I có 15 học sinh, nhóm II có 10 học sinh, nhóm III có 6 học sinh và nhóm IV có 5 học sinh.

HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x và với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x và x gọi là *biến số*.

☞ ***Chú ý***: Ta thấy:

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là *hàm hằng*.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức.
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, ... Chẳng hạn với hàm số được cho bởi công thức $y = 3x - 6$, ta còn có thể viết $y = f(x) = 3x - 6$ và khi đó, thay cho câu " *khi* $x = 2$ *thì giá trị tương ứng của* y *là* 0 " ta viết $f(2) = 0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Đại lượng* y *có phải là hàm số của đại lượng* x *không, nếu:*

a. *Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:*

x	–4	–2	0	1	3	5	7
y	–9	–5	–1	1	5	9	13

b. *Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:*

x	0	2	4	6	8	10	12
y	6	6	6	6	6	6	6

✍ *Giải*

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y.

b. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y, và đây là hàm hằng $y = 6$.

Ví dụ 2: *Đại lượng* y *có phải là hàm số của đại lượng* x *không, nếu:*

a. *Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:*

x	–6	–2	–1	0	1	1	3
y	8	4	2	–1	1	6	8

b. *Có công thức* $y^2 = 4x$.

✍ *Giải*

a. Không là hàm số, vì với $x = 1$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 1 và 6.

b. Không là hàm số, vì với $x = 4$ ta được:

$$y^2 = 4.4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

tức là, với $x = 4$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và – 4.

Ví dụ 3: *Hàm số* $y = f(x)$ *được cho bởi công thức* $f(x) = \frac{12}{x}$.

a. *Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số* $y = f(x)$ *vào bảng sau:*

x	−6	−4	2	3	
y = f(x)					1

b. *Xác định* $f(-12)$, $f(24)$.

✍ *Giải*

a. Ta có được kết quả:

x	−6	−4	2	3	12
$y = \frac{12}{x}$	−2	−3	6	4	1

b. Ta có:

$$f(-12) = \frac{12}{-12} = -1, \quad f(24) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *được cho bởi công thức* $f(x) = |2x - 3|$.

a. *Tính* $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(8)$.

b. *Tính các giá trị của* x *ứng với* $y = -1$, $y = 0$, $y = 3$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7,$$
$$f(0) = |2x - 3| = |2.0 - 3| = |-3| = 3,$$
$$f(2) = |2x - 3| = |2.2 - 3| = |1| = 1,$$
$$f(8) = |2x - 3| = |2.8 - 3| = |16 - 3| = 13.$$

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -1$ thì:

$$|2x - 3| = -1, \text{ vô nghiệm bởi } |2x - 3| \geq 0.$$

- Với $y = 0$ thì:

$$|2x - 3| = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

- Với $y = 3$ thì:

$$|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Ví dụ 5: *Cho hàm số* $y = 3x - 1$. *Tìm các giá trị của* x *sao cho:*

a. y *nhận giá trị âm.*

b. y *nhận giá trị lớn hơn* 5.

Giải

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là:

$$3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $x < \frac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là:

$$3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy, với x > 2 thì y nhận giá lớn hơn 5.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–6	–4	–2	0	2	4	6

Bài 2: Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	–4	–2	0	1	3	5	7
y	8	8	8	8	8	8	8

Bài 3: Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	– 8	–4	–4	–2	0	3	5
y	2	4	12	6	1	7	9

Bài 4: Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{36}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	–9	–6	3	12	
y = f(x)					1

b. Xác định f(– 12), f(72).

Bài 5: Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = 2x + 9.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	–3	–1	2	6	
y = f(x)					27

b. Xác định f(–8), f(7).

Bài 6: Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

a. Tính f(–4), f(–2), f(0), f(1), f(5).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = – 8, y = – 5, y = 0, y = – 10.

Bài 7: Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = |x^2 - 1|$.

a. Tính f(– 2), f(0), f(3), f(6).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = – 9, y = 0, y = 8.

Bài 8: Cho hàm số $y = 2x - 6$. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị dương.

b. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

Bài 9: Cho hàm số $y = 6 - 5x$. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 1.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Có là hàm số.

Bài 2: Có là hàm số và đây là hàm hằng $y = 8$.

Bài 3: Không là hàm số, vì với $x = -4$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và 12.

Bài 4:

a. Ta có được kết quả:

x	-9	-6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

b. Ta có $f(-12) = -3$, $f(72) = \frac{1}{2}$.

Bài 6:

a. Ta lần lượt có:

$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7$, $f(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$,

$f(0) = 0 - 9 = -9$, $f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8$,

$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$.

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -8$ thì:

  $x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -8 + 9 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Với $y = -5$ thì:

  $x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

- Với $y = 0$ thì:

  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

- Với $y = -10$ thì:

  $x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1$, không tồn tại x.

Bài 8:

a. Để y nhận giá trị dương điều kiện là $2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.
Vậy, với $x > 3$ thì y nhận giá trị dương.

b. Để y nhận giá trị nhỏ hơn 3 điều kiện là $2x - 6 < 3 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$.

Vậy, với $x < \frac{9}{2}$ thì y nhận giá nhỏ hơn 3.

CHỦ ĐỀ 4

MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

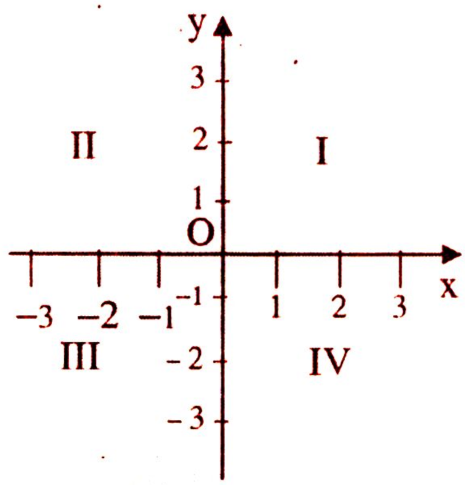
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

3. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Trên mặt phẳng, vẽ hai trục số Ox, Oy vuông góc với nhau tại O. Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy.

Trong hệ trục toạ độ Oxy, ta có:

- Ox, Oy gọi là các *trục toạ độ*.
- Ox gọi là *trục hoành* (người ta thường vẽ Ox nằm ngang).
- Oy gọi là *trục tung* (người ta thường vẽ Oy thẳng đứng).
- Giao điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là *gốc toạ độ*.



Mặt phẳng có hệ trục toạ độ Oxy gọi là *mặt phẳng toạ độ Oxy*.

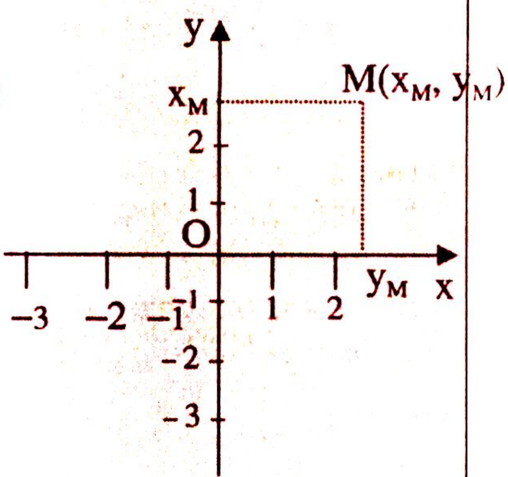
☛ ***Chú ý***: Cần biết:

- Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm).
- Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành 4 góc, bao gồm góc phần tư thứ I, II, III, IV theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ.

- **TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ**

Trên mặt phẳng toạ độ:

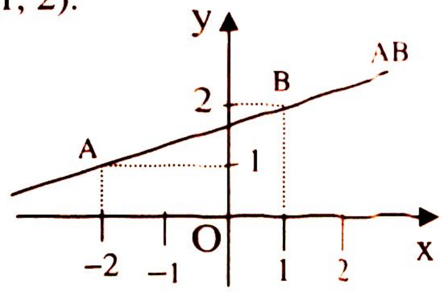
- Mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_M; y_M)$. Ngược lại, mỗi cặp số (x_M, y_M) xác định một điểm M.
- Cặp số $(x_M; y_M)$ được gọi là *toạ độ của điểm* M, x_M được gọi là *hoành độ* và y_M được gọi là *tung độ* của điểm M.
- Điểm M có toạ độ $(x_M; y_M)$ được kí hiệu là $M(x_M; y_M)$ – *Lưu ý rằng hoành độ luôn được viết trước*.



☛ ***Chú ý***: Ta luôn có O(0 ; 0).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Vẽ đường thẳng* AB, *biết* A(–2; 1) *và* B(1; 2).

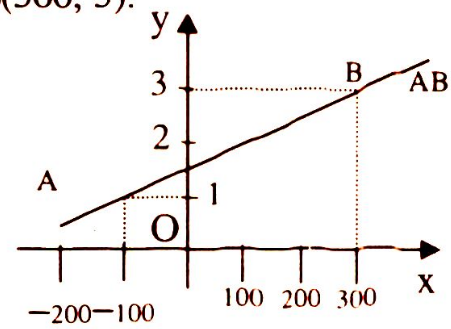


Giải

Để vẽ đường thẳng AB, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(–2; 1) và B(1; 2).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.

Ví dụ 2: *Vẽ đường thẳng* AB, *biết* A(–100; 1) *và* B(300; 3).



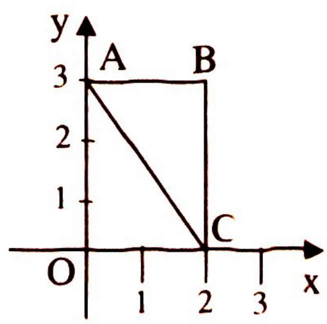
Giải

Để vẽ đường thẳng AB, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(–100; 1) và B(300; 3).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.

Nhận xét: Trong phần kiến thức cơ bản chúng ta đã thấy chú ý " *Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm)* ". Tuy nhiên, với toạ độ A(–100; 1) và B(300; 3) nếu ta sử dụng đơn vị dài trên hai trục toạ độ là như nhau thì việc vẽ đường thẳng AB là sẽ vượt ra ngoài khuôn khổ trang vở, do đó ở đây ta chọn tỉ lệ trên trục Ox bằng 1 : 100.

Ví dụ 3: *Vẽ* ΔABC, *biết* A(0; 3), B(2; 3) *và* C(2; 0). *Khi đó có nhận xét gì về* ΔABC ?



Giải

Để vẽ ΔABC, ta thực hiện như sau:

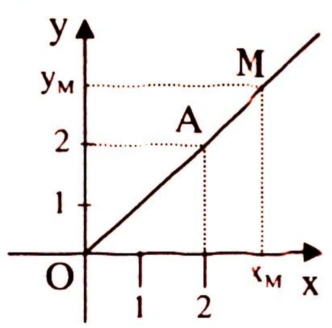
- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(0; 3), B(2; 3) và C(2; 0).
- Nối các điểm A, B và C, ta được ΔABC.

Nhận thấy rằng, ΔABC là tam giác vuông tại C

Ví dụ 4: *Trên hệ trục toạ độ* Oxy, *vẽ tia phân giác của góc phần tư thứ* I.

a. *Lấy điểm A trên tia phân giác đó có hoành độ* $x_A = 2$, *hãy xác định tung độ của điểm* A.

b. *Nhận xét gì về mối liên hệ giữa hoành độ và tung độ của các điểm* M *nằm trên tia phân giác đó.*



Giải

a. Dựa vào hình vẽ, ta thấy ngay: $y_A = 2$.

b. Mọi điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường phân giác trên ta đều có:

$$x_M = y_M \geq 0.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Trên hệ trục toạ độ Oxy, vẽ các đường phân giác của các góc phần tư thứ II, IV.

a. Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = -3$, hãy xác định tung độ của điểm A.

b. Nhận xét gì về mối liên hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

Bài 2: Trên hệ trục toạ độ Oxy, vẽ các đường phân giác của các góc phần tư thứ I và III.

a. Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = 6$, hãy xác định tung độ của điểm A.

b. Nhận xét gì về mối liên hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

Bài 3: Vẽ đường thẳng AB, biết:

a. $A(-3, -1)$ và $B(2, 3)$.

b. $A(-2, -1)$ và $B(-1, 4)$.

c. $A(\frac{5}{4}, 2)$ và $B(3, 2)$.

d. $A(\frac{1}{2}, 0)$ và $B(0, \frac{3}{2})$.

e. $A(2700, 1)$ và $B(-900, -3)$.

Bài 4: Vẽ ΔABC, biết:

a. $A(1, 1)$, $B(2, 5)$ và $C(4, -1)$.

b. $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$ và $C(3, 0)$.

c. $A(-180, -30)$, $B(-60, 60)$ và $C(90, 15)$.

Bài 5: Vẽ tứ giác ABCD, biết:

a. $A(-1, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 3)$ và $D(2, 1)$. Tứ giác ABCD là hình gì ?

b. $A(-2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 3)$ và $D(2, -1)$. Tứ giác ABCD là hình gì ?

Bài 6: Vẽ ngũ giác ABCDE, biết:

a. $A(-2, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 4)$, $D(2, 2)$, $E(2, 0)$.

b. $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 0)$, $D(0, -3)$, $E(-3, -3)$.

Bài 7: Cho $A(x_A, y_A)$, tìm điều kiện của x_A và y_A để:

a. Điểm A thuộc trục Ox.

b. Điểm A thuộc trục Oy.

c. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ I.

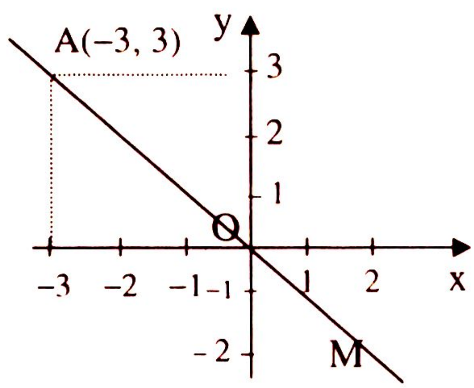
d. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ II.

e. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ III.

f. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ IV.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:



a. Từ hình vẽ ta nhận được $y_A = 3$.

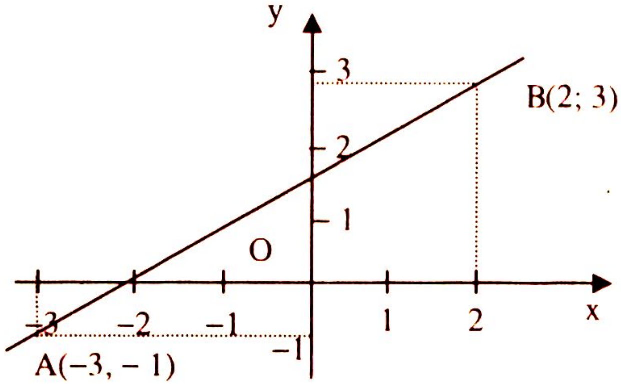
b. Với mọi điểm $M(x_M, y_M)$ thuộc đường phân giác đã cho, ta luôn có:

$$x_M = -y_M.$$

Bài 3:

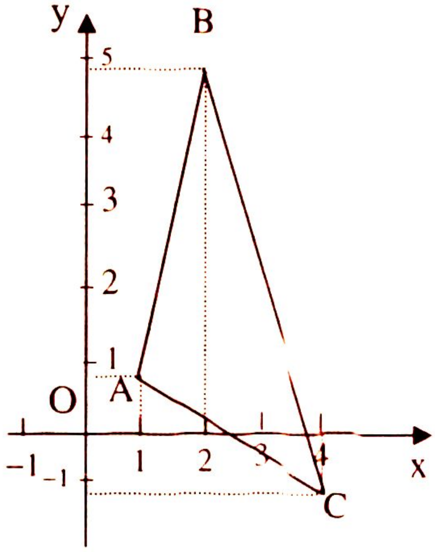
a. Để vẽ đường thẳng AB với $A(-3; -1)$ và $B(2; 3)$, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(−3; −1) và B(2; 3).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.



Bài 4:

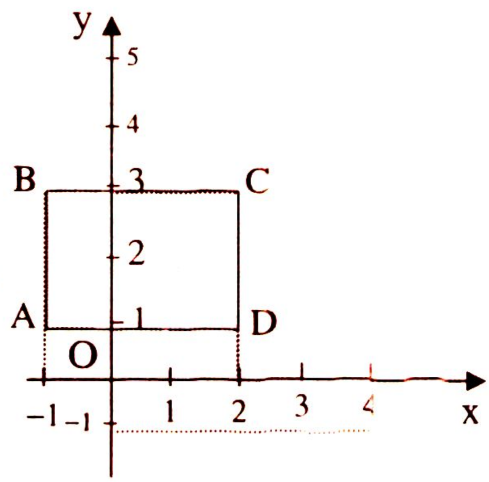
a. Để vẽ ΔABC với A(1, 1), B(2, 5) và C(4, − 1), ta thực hiện như sau:



- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(1, 1), B(2, 5) và C(4, − 1).
- Nối A và B, A và C, B và C, ta được ΔABC cần vẽ.

Bài 5:

a. Để vẽ tứ giác ΔABC với A(− 1, 1), B(− 1, 3), C(2, 3) và D(2, 1), ta thực hiện như sau:



- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(− 1, 1), B(− 1, 3), C(2, 3) và D(2, 1).
- Nối A và B, B và C, C và D, D và A, ta được tứ giác ABCD cần vẽ.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

Bài 7:

a. Để điểm A thuộc trục Ox điều kiện là $y_A = 0$.

b. Để điểm A thuộc trục Oy điều kiện là $x_A = 0$.

c. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ I điều kiện là $x_A, y_A > 0$.

d. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ II điều kiện là $x_A < 0$ và $y_A > 0$.

e. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ III điều kiện là $x_A, y_A < 0$.

f. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ IV điều kiện là $x_A > 0$ và $y_A < 0$.

CHỦ ĐỀ 5

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax, VỚI a ≠ 0

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Đồ thị hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x, y) trên mặt phẳng toạ độ.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax, (a ≠ 0)

Đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0) là một đường thẳng đi qua gốc độ.

Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0), ta thực hiện:

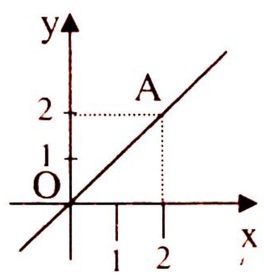
- Xác định thêm một điểm $A(x_A; ax_A)$ với $x_A \neq 0$.
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = ax.

☞ ***Nhận xét***: Ta thấy:

- Đồ thị hàm số y = x chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.
- Đồ thị hàm số y = –x chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Vẽ đồ thị hàm số* y = x.



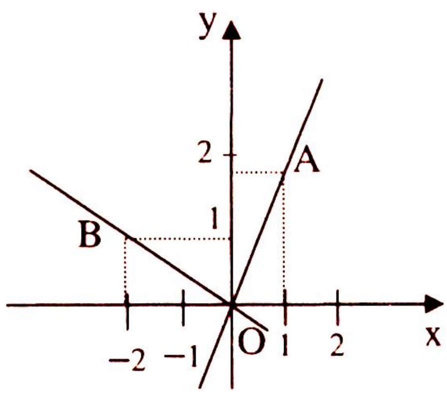
✍ *Giải*

Để vẽ đồ thị hàm số y = x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(2, 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = x.

Ví dụ 2: *Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ* Oxy *đồ thị của các hàm số*: $y = 2x$ và $y = -\frac{1}{2}x$.

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?



✍ *Giải*

Để vẽ đồ thị hàm số y = 2x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1; 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 2x.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(–2; 1).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

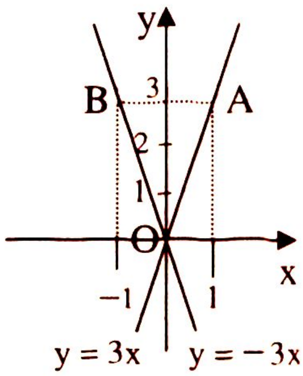
Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.

Ví dụ 3: *Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:*

$$y = 3x \text{ và } y = -3x.$$

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

✍ *Giải*



Để vẽ đồ thị hàm số y = 3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1; 3).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 3x.

Để vẽ đồ thị hàm số y = −3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(−1; 3).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số y = − 3x.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.

☞ ***Nhận xét***:

1. Ta biết rằng: $|3x| = \begin{cases} 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

   Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

   - Phần đồ thị của hàm số y = 3x trong góc phần tư thứ I.
   - Phần đồ thị của hàm số y = − 3x trong góc phần tư thứ II.

   ta nhận được đồ thị của hàm số y = |3x|.

2. Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số y = |ax| ta thực hiện như sau:

   - Vẽ tia OA, với $A(x_A; ax_A)$, $x_A > 0$.
   - Vẽ tia OB, với $B(-x_A; ax_A)$.

   hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

Ví dụ 4: *Cho hàm số* y = ax. *Hãy xác định hệ số* a, *biết:*

a. *Đồ thị hàm số đi qua điểm* A(3; 2).

b. *Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ* II, IV.

✍ *Giải*

a. Vì điểm A(3; 2) thuộc đồ thị hàm số nên: $2 = a.3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

   Vậy, hàm số có dạng $y = \frac{2}{3}x$.

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có ngay a = −1.

Ví dụ 5: *Đồ thị của hàm số* y = ax *nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ* Oxy, *nếu:*

a. $a > 0$.　　　　b. $a < 0$.

Giải

a. Với $a > 0$, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A cùng dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ I, III.

b. Với $a < 0$, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A trái dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ II, IV.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = 2x$.
b. $y = 81x$.
c. $y = -x$.
d. $y = -3x$.
e. $y = -\frac{1}{2}x$.

Bài 2: Cho hàm số y = ax. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 8).
b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(\frac{3}{4}, -3)$.
c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài 3: Cho hàm số $y = (2a - 3)x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(2, 3).
b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$.
c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài 4: Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 3).
b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài 5: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |x|$.
b. $y = |2x|$.
c. $y = \left|\frac{3}{4}x\right|$.
d. $y = \left|-\frac{x}{2}\right|$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Lấy thêm điểm A(1, 2) — *Học sinh tự vẽ hình.*

b. Lấy thêm điểm A(1, 81) — *Học sinh tự vẽ hình với lưu ý tỉ lệ về đơn vị lài trên hai trục.*

c. Lấy thêm điểm A(– 2, – 2) — *Học sinh tự vẽ hình.*

d. Lấy thêm điểm A(1, – 3) — *Học sinh tự vẽ hình.*

e. Lấy thêm điểm A(2, – 1) — *Học sinh tự vẽ hình.*

Bài 2: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Vì điểm A(1, 8) thuộc đồ thị hàm số nên $8 = a.1 \Leftrightarrow a = 8$.
Vậy hàm số có dạng y = 8x.

b. Vì điểm $B(\frac{3}{4}, -3)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4$.

Vậy hàm số có dạng y = – 4x.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III, ta có ngay a = 1.

Bài 3: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Vì điểm A(2, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = (2a - 3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{3}{2}x$.

b. Vì điểm $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a - 3).\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy hàm số có dạng y = – x.

Bài 4: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Vì điểm A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = |a - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có dạng y = 3x.

b. Vì điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$8 = |a - 1|.(-\frac{1}{2}) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại a.

CHƯƠNG III - THỐNG KÊ

CHỦ ĐỀ 1

THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ- TẦN SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. THU THẬP SỐ LIỆU - BẢNG SỐ LIỆU THỐNG KÊ BAN ĐẦU

Định nghĩa: ***Thu thập số liệu*** *thống kê là việc ghi lại các số liệu về vấn đề được quan tâm. Các số liệu được ghi lại trong một bảng, gọi là* ***bảng thống kê ban đầu****.*

2. DẤU HIỆU - GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

Định nghĩa:

a. *Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê.*

b. *Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu..*

3. TẦN SỐ CỦA MỖI GIÁ TRỊ

Định nghĩa: *Tần số của một giá trị là số lần lặp lại của mỗi giá trị đó trong bảng số liệu ban đầu. Kí hiệu: m.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Khi điều tra về* "Môn học mà bạn yêu thích nhất " *đối với các bạn trong lớp, bạn Hoa thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:*

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

a. *Có bao nhiêu bạn tham gia vào quá trình điều tra của bạn Hoa ?*

b. *Dấu hiệu ở đây là gì ?*

c. *Có bao nhiêu môn học được các bạn đưa ra ?*

d. *Tần số của mỗi môn học là như thế nào ?*

✍ *Giải*

a. Trong bản số liệu, ta thấy:

- Có 5 cột ;
- Mỗi cột có 5 hàng.

Vậy, trong quá trình điều tra của bạn Hoa có tất cả:

5 . 5 = 25 bạn tham gia.

b. Ở đây, dấu hiệu là:

" *Môn học mà bạn yêu thích nhất* ".

c. Có 8 môn học được các bạn đưa ra.

Đó là: Toán học, Vật lý, Hoá học, Anh văn, Văn học, Sinh học, Lịch sử, Địa lý.

d. Ta có:

- Môn Toán học có 5 bạn yêu thích.
- Môn Vật lý có 3 bạn yêu thích.
- Môn Hóa học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Văn học có 4 bạn yêu thích.
- Môn Anh văn có 2 bạn yêu thích.
- Môn Sinh học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Lịch sử có 2 bạn yêu thích.
- Môn Địa lý có 3 bạn yêu thích.

Ví dụ 2: *Chọn 30 hộp kẹo một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem cân, kết quả được ghi lại trong bảng sau (khi đã trừ bao bì):*

Khối lượng kẹo trong hộp (đơn vị: gam)		
200	199	202
200	201	201
199	199	200
198	200	199
201	202	198
200	198	201
202	200	200
200	199	198
199	200	199
200	200	201

Hãy cho biết:

a. *Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.*

b. *Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.*

c. *Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Dấu hiệu cần tìm hiểu là:

" *Số gam kẹo có trong hộp (đã trừ bao bì)* "

- Có 30 giá trị của dấu hiệu đó.

b. Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu, đó là 198 ; 199 ; 200 ; 201 ; 202.

c. Trong 30 hộp kẹo, ta có:

- 4 hộp có khối lượng kẹo bằng 198 gam.
- 7 hộp có khối lượng kẹo bằng 199 gam.
- 11 hộp có khối lượng kẹo bằng 200 gam.
- 5 hộp có khối lượng kẹo bằng 201 gam.
- 3 hộp có khối lượng kẹo bằng 202 gam.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Trong một đợt khám sức khỏe đầu năm của lớp 6A, người điều tra thu thập được bảng số liệu sau:

STT	Chiều cao của học sinh nam (cm)
1	154
2	156
3	152
4	156
5	148
6	151
7	153
8	150
9	156
10	152
11	151
12	153
13	154
14	152
15	152

Bảng 1

STT	Chiều cao của học sinh nữ(cm)
1	151
2	151
3	156
4	152
5	147
6	150
7	151
8	149
9	153
10	153
11	150
12	155
13	154
14	151
15	150

Bảng 2

Hãy cho biết:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu (cả hai bảng).

b. Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu (của từng bảng).

c. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng (của từng bảng).

Bài 2: Khi điều tra về chỉ số nước tiêu thụ của một khu nhà tập thể, người điều tra thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:

30 m^3	31 m^3	45 m^3	60 m^3	50 m^3
35 m^3	30 m^3	53 m^3	35 m^3	50 m^3
44 m^3	50 m^3	30 m^3	45 m^3	40 m^3
32 m^3	39 m^3	32 m^3	30 m^3	35 m^3
35 m^3	31 m^3	45 m^3	33 m^3	45 m^3

a. Có bao nhiêu hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó ?

b. Dấu hiệu ở đây là gì ?

c. Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Bài 3: Chọn 30 hộp bánh một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem đánh giá chất lượng, kết quả được ghi lại trong bảng sau:

Chất lượng bánh trong hộp		
A	C	A
A	A	C
B	B	A
C	A	B
A	B	C
C	B	C
B	C	A
B	C	B
C	A	C
A	B	C

Hãy cho biết:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.

b. Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu là "*Chiều cao của học sinh lớp 6A*"

b. Ta có:

- Trong bảng 1: có 15 giá trị và 7 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.
- Trong bảng 2: có 15 giá trị và 9 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.

c. Ta thấy:

Trong bảng 1 có:

- 1 bạn cao 148 cm.
- 1 bạn cao 150 cm.
- 2 bạn cao 151 cm.
- 4 bạn cao 152 cm.
- 2 bạn cao 153 cm.
- 2 bạn cao 154 cm.
- 3 bạn cao 156 cm.

Trong bảng 2 có:

- 1 bạn cao 147 cm.
- 1 bạn cao 149 cm.
- 3 bạn cao 150 cm.
- 4 bạn cao 151 cm.
- 1 bạn cao 152 cm.
- 2 bạn cao 153 cm.
- 1 bạn cao 154 cm.
- 1 bạn cao 155 cm.
- 1 bạn cao 156 cm.

Bài 2:

a. Có 25 hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó.

b. Dấu hiệu cần tìm hiểu là " *Chỉ số nước tiêu thụ* ".

c. Có 25 giá trị và 12 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.

d. Ta có:

- Có 4 hộ tiêu thụ 30 m^3 nước.
- Có 2 hộ tiêu thụ 31 m^3 nước.
- Có 2 hộ tiêu thụ 32 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 33 m^3 nước.
- Có 4 hộ tiêu thụ 35 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 39 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 40 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 44 m^3 nước.
- Có 4 hộ tiêu thụ 45 m^3 nước.
- Có 3 hộ tiêu thụ 50 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 53 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 60 m^3 nước.

Bài 3:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu là " *Chất lượng bánh trong hộp* " có 30 giá trị của dấu hiệu đó

b. Có 3 giá trị khác nhau của dấu hiệu. Đó là A, B, C

c. Ta có:

- Có 10 hộp bánh có chất lượng A.
- Có 9 hộp bánh có chất lượng B.
- Có 11 hộp bánh có chất lượng C.

CHỦ ĐỀ 2 BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu hay bảng phân phối thực nghiệm của một dấu hiệu X thường có dạng:

Giá trị của X	Tần số tương ứng
x_1	m_1
x_2	m_2
...	...
x_k	m_k
	Tổng số n = ...

hoặc có dạng:

x_1	x_2	x_3	...	x_{k-1}	x_k
m_1	m_2	m_3	...	m_{k-1}	m_k

☛ ***Nhận xét***:

1. Từ bảng số liệu thống kê ban đầu ta có thể lập bảng tần số.
2. Bảng tần số giúp người điều tra dễ dàng đưa ra các nhận xét.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Khi điều tra về "Môn học mà bạn yêu thích nhất" đối với các bạn trong lớp, Hoa đã ghi lại bằng bảng điều tra ban đầu như sau:*

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm và có nhận xét gì trong quá trình điều tra.

✍ *Giải*

Ta có bảng phân phối thực nghiệm như sau:

STT	Môn học	Tần số
1	Toán học	5
2	Vật lý	3
3	Hóa học	3
4	Văn học	4
5	Anh văn	2
6	Sinh học	3
7	Lịch sử	2
8	Địa lý	3

Từ bảng trên, ta thấy: Có nhiều bạn yêu thích môn Toán nhất và có ít bạn thích học môn Anh và môn Sử.

Ví dụ 2: *Điều tra 100 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng số liệu sau:*

2	1	6	4	2	7	3	5	1	8
5	1	4	4	2	5	3	5	2	7
3	1	4	5	2	3	1	5	2	8
4	3	6	5	8	6	5	6	4	4
2	4	3	5	8	7	1	6	2	2
2	3	2	1	6	2	2	2	6	2
1	3	2	3	2	2	2	4	4	2
3	5	1	3	1	5	6	7	3	3
3	6	8	5	3	5	6	1	3	3
1	8	7	4	4	6	1	8	5	5

a. *Dấu hiệu là gì ?*

b. *Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của dấu hiệu đó.*

Giải

a. Dấu hiệu " *Số con trong gia đình trong khu vực* "

b. Lập bảng phân phối thực nghiệm:

Số con trong 1 gia đình	**Tần số**
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Để khảo sát kết quả học Toán của trường, người ta chọn ra một lớp bất kì để làm bài kiểm tra. Kết quả kiểm tra như sau:

3	4	10	9	10
5	6	9	8	10
8	8	5	7	5
5	3	8	4	8
6	5	7	6	9
7	9	6	7	6
9	6	9	5	7
10	8	7	6	9
8	10	3	8	7
7	7	5	9	6

a. Từ cuộc điều tra trên, hãy nêu dấu hiệu là gì ?

b. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó.

Bài 2: Năng suất lao động của công nhân trong một xí nghiệp bánh kẹo như sau (hộp / ngày):

10	12	14	11	15
12	13	15	15	11
15	12	12	12	13
12	15	15	12	14
13	11	10	14	12

a. Từ cuộc điều tra trên, hãy nêu dấu hiệu là gì ?

b. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó và nêu ra một vài nhận xét.

Bài 3: Cho bảng tần số:

Giá trị	10	20	30	40	50	
Tần số	5	9	7	3	6	n = 30

Hãy viết lại bảng số liệu ban đầu với số liệu từ bảng trên.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Dấu hiệu cần điều tra " *Chất lượng học tập của học sinh* "

b. Ta có bảng phân phối thực nghiệm:

Điểm số	Tần số
3	3
4	2
5	7
6	8
7	9
8	8
9	8
10	5
	Tổng số = 50

Bài 2:

a. Dấu hiệu cần điều tra:

" *Năng suất* làm việc của công nhân"

b. Ta có bảng phân phối thực nghiệm:

Hộp / ngày	Tần số
10	2
11	4
12	7
13	3
14	3
15	6
	Tổng số = 25

Từ bảng trên, ta thấy:

- Có 6 trên 25 công nhân làm được 15 hộp bánh một ngày, chiếm tỉ lệ cao.
- Số công nhân làm được 10, 13, 14 hộp / ngày chiếm tỉ lệ thấp.

Bài 3: Từ bảng tần số, ta có bảng số liệu ban đầu như sau:

10	20	30
30	40	50
50	10	20
20	30	30
30	20	50
40	10	20
20	20	10
50	50	20
50	10	30
20	30	40

CHỦ ĐỀ 3 # BIỂU ĐỒ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Với bảng:

Giá trị của X	Tần số tương ứng
x_1	m_1
x_2	m_2
x_3	m_3
...	...
x_k	m_k

Nếu ta biểu diễn trên hệ trục toạ độ xOm theo cách:

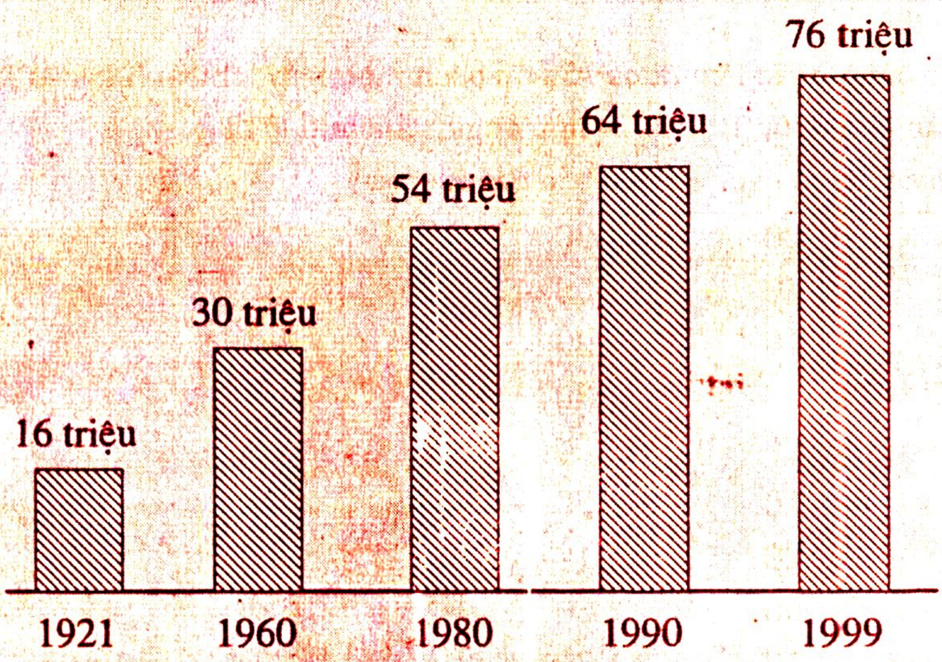
- Nối điểm $(x_1, 0)$ với điểm (x_1, m_1) để được một đoạn thẳng.
- Nối điểm $(x_2, 0)$ với điểm (x_2, m_2) để được một đoạn thẳng.
- ...
- Nối điểm $(x_k, 0)$ với điểm (x_k, m_k) để được một đoạn thẳng.

Khi đó, ta nhận được một biểu đồ gọi là biểu đồ đoạn thẳng.

2. BIỂU ĐỒ HÌNH CHỮ NHẬT

Nếu ta thay các đoạn thẳng bằng các hình chữ nhật thì ta được một loại biểu đồ mới. Đó là, biểu đồ hình chữ nhật.

Thí dụ 1: *Biểu đồ dân số Việt Nam qua tổng điều tra trong thế kỉ* XX



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho bảng tần số:*

Giá trị x	25	45	28	59	81	99	
Tần số m	2	3	2	4	5	4	n = 20

Hãy lập biểu đồ đoạn thẳng để biểu diễn các số liệu trên.

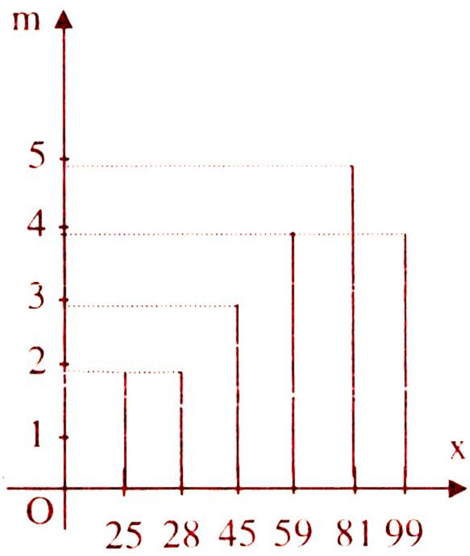
Giải

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Dựng hệ trục toạ độ. Trên đó, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số m.

Bước 2: Xác định các điểm có toạ độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó. Ở đây, ta được: (25, 2) ; (45, 3) ; (28, 2) ; (59, 4); (81, 5) ; (99, 4).

Bước 3: Từ điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành.



Ví dụ 2: *Trong hồ sơ khảo sát của đài khí tượng thuỷ văn năm 2004 có ghi lại nhiệt độ trung bình của từng tháng như sau:*

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t^0	18	20	24	28	30	31	32	31	28	25	18	17

a. Hãy lập bảng tần số.

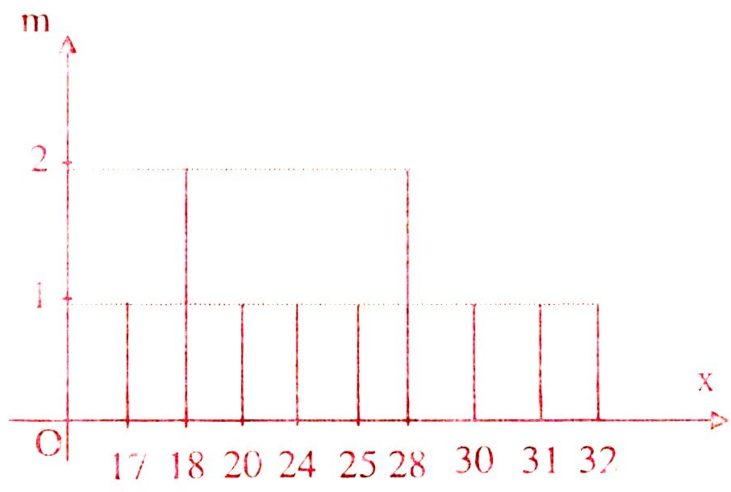
b. Hãy biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

Giải

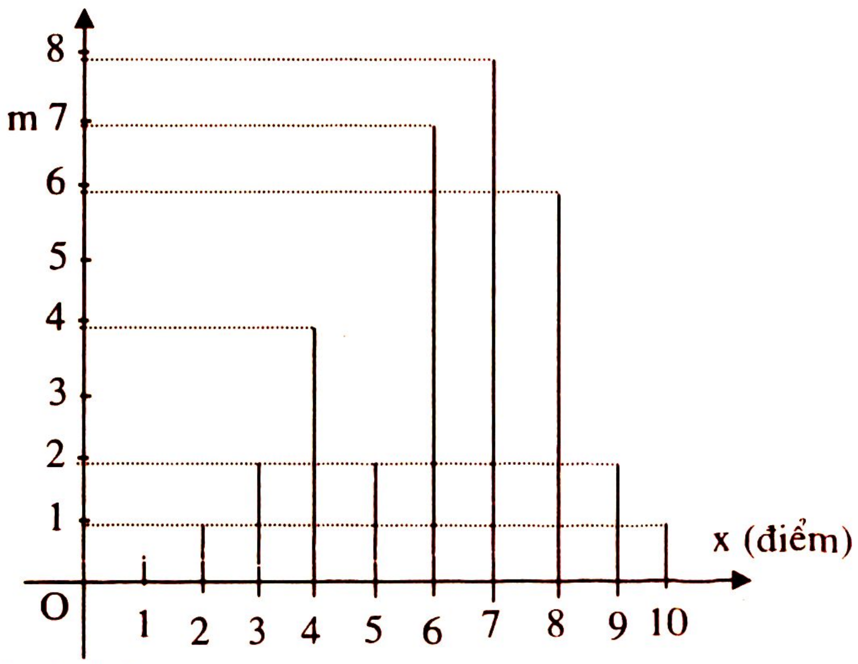
a. Ta có, bảng tần số:

Giá trị	17	18	20	24	25	28	30	31	32	
Tần số	1	2	1	1	1	2	1	2	1	n = 12

b. Biểu đồ đoạn thẳng



Ví dụ 3: *Cho biểu đồ biểu diễn kết quả học tập của học sinh trong một lớp qua một bài kiểm tra.*



Từ biểu đồ trên hãy:

a. *Nhận xét sơ bộ về tình hình học tập của lớp.*

b. *Lập bảng tần số.*

✍ *Giải*

a. Từ biểu đồ trên, ta có một số nhận xét sau:

- Tình hình học tập của lớp ở mức khá.
- Không có bạn nào bị điểm 1 song vẫn có bạn bị điểm dưới trung bình.
- Tỉ lệ đạt điểm 6, 7, 8 là khá cao.

b. Lập bảng tần số

Giá trị	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	0	1	2	4	2	7	8	6	2	1	n = 32

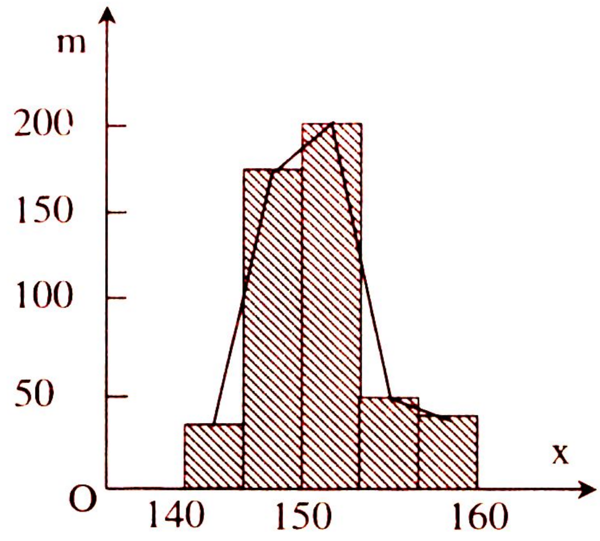
Ví dụ 4: *Để kiểm tra sức khoẻ của một trường trung học cơ sở có 500 học sinh. Người điều tra đã thống kê về chiều cao của các em thông qua bảng sau:*

Chiều cao (tính theo cm)	Giá trị trung tâm	Tần số
140 - 144	142	35
144 - 150	146	175
150 - 154	152	200
154 - 158	156	50
158 - 160	159	40
		Tổng số = 500

Hãy lập biểu đồ chữ nhật để biểu diễn các số liệu trên

✍ *Giải*

Lập biểu đồ chữ nhật



C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Trong đợt hè vừa qua, nhà trường tổ chức hoạt động trồng cây gây rừng. Kết quả thu được như sau:

Lớp	7A	7B	7C	7D
Số cây trồng	15	17	12	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

Bài 2: Lượng mưa trung bình hàng tháng trong năm 2004 ở Hà Nội được trạm khí tượng thuỷ văn ghi lại trong bảng dưới đây (đo theo mm và làm tròn đến mm):

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lượng mưa	30	30	30	40	80	80	120	150	100	50	40	30

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng và nhận xét

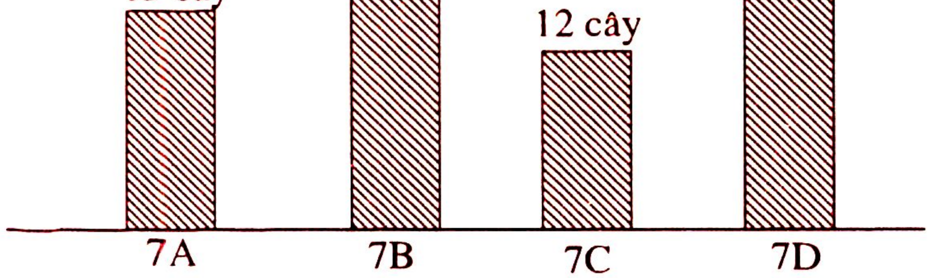
Bài 3: Diện tích đất rừng ở nước ta ngày càng bị thu hẹp. Theo thống kê từ năm 1995 đến 1998, mỗi năm số diện tích đất rừng bị tàn phá như sau (đơn vị: nghìn ha):

Năm	1996	1997	1998	1999
Diện tích	25	10	15	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

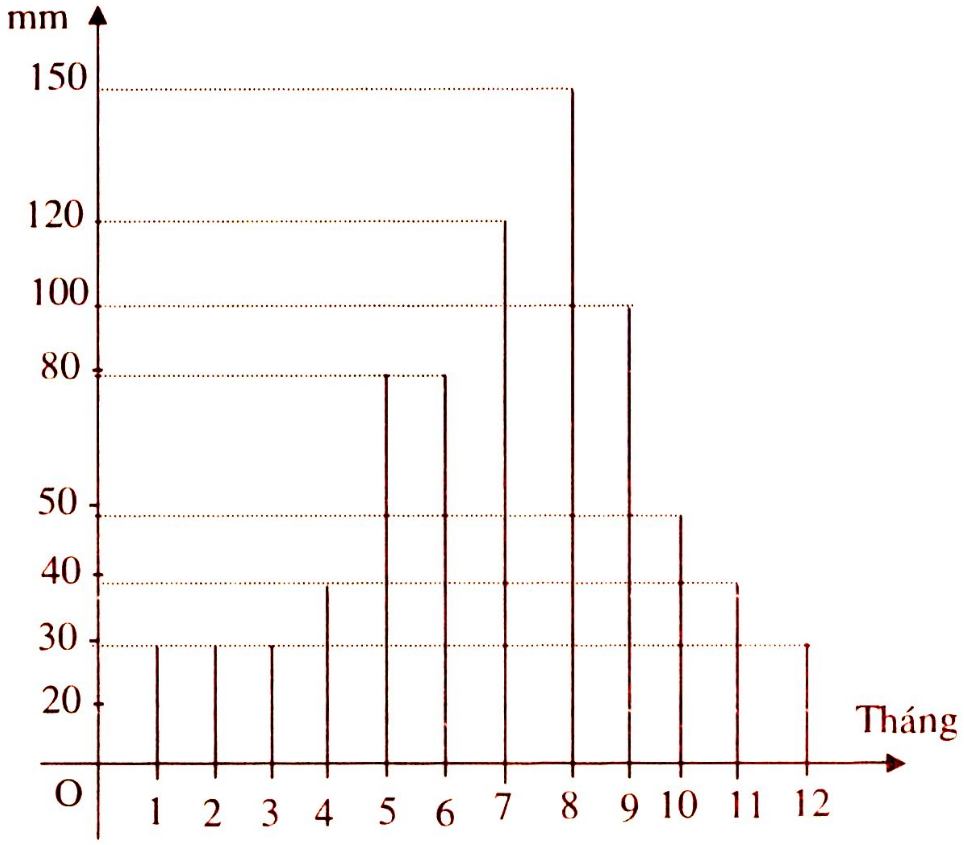
D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:



Biểu đồ biểu diễn số cây trồng trong dịp hè của khối 7

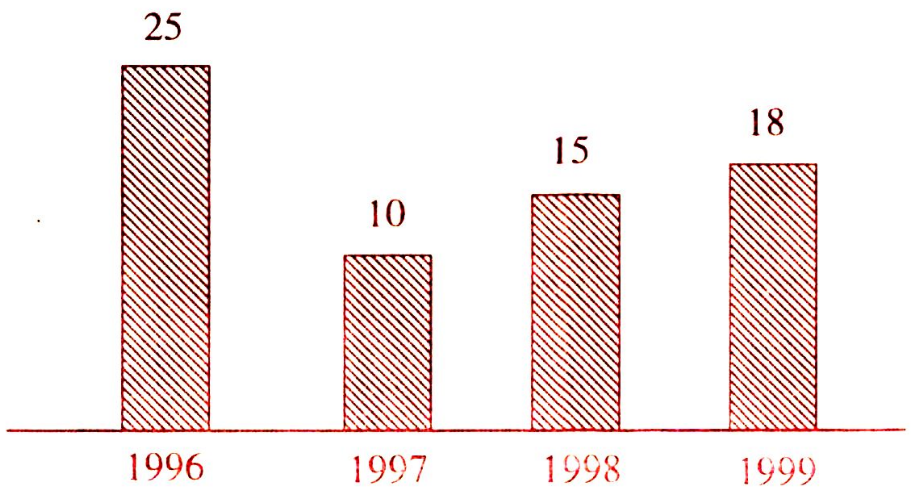
Bài 2:



Biểu đồ biểu diễn lượng mưa trong năm 2004 ở Hà Nội.

Từ biểu đồ trên ta có nhận xét: ở khu vực Hà Nội, lượng mưa lớn nhất là vào tháng 8 và trời khá hanh khô vào cuối năm và đầu năm.

Bài 3:



Biểu đồ biểu diễn diện tích đất rừng bị phá.

CHỦ ĐỀ 4 SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG CỦA DẤU HIỆU

Định nghĩa:*Giá trị trung bình của một dấu hiệu là trung bình cộng các giá trị của dấu hiệu đó.*

Kí hiệu: Giá trị trung bình của dấu hiệu X là $\overline{X}$.

2. CÔNG THỨC TÍNH SỐ TRUNG BÌNH CỘNG CỦA DẤU HIỆU

Nhận xét rằng: Dựa vào bảng tần số, ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu như sau:

1. Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
2. Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
3. Chia tổng đó cho số các giá trị (hay tổng các tần số).

Vậy, ta có thể sử dụng ngay công thức khi đã có bảng thực nghiệm:

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k}{n}$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
- $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X.
- $n_1, n_2, \ldots, n_k$ là k tần số tương ứng.

3. Ý NGHĨA CỦA SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Ta có:

" Số trung bình cộng thường được dùng làm đại diện cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại ".

☞ ***Chú ý***:

1. Khi các giá trị của biến lượng có sự chênh lệch quá lớn thì giá trị trung bình không thể đại diện cho biến lượng mà phải kết hợp cùng những số khác.
2. Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

4. MỐT CỦA DẤU HIỆU

Định nghĩa: Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số.

Kí hiệu: M_0.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Điều tra 100 gia đình chọn ra từ 800 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng phân phối thực nghiệm sau:*

X_i	m_i
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

Tìm giá trị trung bình $\overline{X}$ của biến lượng

Giải

Áp dụng công thức, ta được:

$$\overline{X} = \frac{1.13 + 2.20 + 3.17 + 4.12 + 5.15 + 6.11 + 7.5 + 8.7}{100} = \frac{384}{100} = 3{,}84.$$

Ví dụ 2: *Tìm giá trị trung bình* $\overline{X}$ *của biến lượng được cho bởi bảng phân phối thực nghiệm sau:*

Điểm số mỗi lần bắn (X_i)	m_i
10	25
9	20
8	31
7	8
6	10
5	6
	Tổng số = 100

Giải

Áp dụng công thức, ta được:

$$\overline{X} = \frac{10.25 + 9.20 + 8.31 + 7.8 + 6.10 + 5.6}{100} = \frac{824}{100} = 8{,}24.$$

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng:*

" Nếu cộng các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được cộng với số đó ".

Giải

Giả sử:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có:

$$n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \Rightarrow \overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n}.$$

Giả sử a là số được cộng thêm vào mỗi biến lượng

Vậy giá trị của các biến lượng là:

$$(x_1 + a), (x_2 + a), (x_3 + a), \ldots, (x_k + a).$$

Khi đó:

$$\overline{X}_1 = \frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + (x_3 + a)m_3 + \ldots + (x_k + a)m_k}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k)a}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + na}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n} + a = \overline{X} + a \text{ (đpcm)}$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính trung bình cộng của 10 thùng hàng. Trong đó có 3 thùng nặng 5 kg; 2 thùng nặng 6 kg; 4 gói nặng 7,5 kg; 3 thùng nặng 8 kg và 1 thùng nặng 9 kg.

Bài 2: Người ta điều tra trên 8 phần tử, các thông số nhận được là: 15, 30, 25, 45, 35, 40, 45, 50.

a. Tính tần số của mỗi thông số.

b. Tính giá trị trung bình của một biến lượng.

Bài 3: Người ta kiểm tra 10 em học sinh để đánh giá chất lượng học tập chung của cả lớp. Điểm mà các em đó đạt được như sau: 9, 4, 6, 5, 10, 6, 8, 4, 8, 9.

a. Tính tần số của mỗi thông số.

b. Lập bảng phân phối thực nghiệm.

c. Tính giá trị trung bình của một biến lượng.

Bài 4: Chứng minh rằng:

" Nếu trừ các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được trừ với số đó ".

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Trọng lượng	Tần số (m)	Tích x.m	
5	3	15	
6	2	12	
7,5	4	30	
8	3	24	
9	1	9	$\overline{X} = \frac{90}{10} = 9$
	N = 10	Tổng: 90	

Vậy trung bình cộng của 10 thùng hàng là 9 kg.

Bài 2: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Thông số	Tần số (m)	Tích x.m	
15	1	15	
25	1	25	
30	1	30	
35	1	35	
40	1	40	
45	2	90	
50	1	50	$\overline{X} = \frac{285}{8}$
	N = 8	Tổng: 285	

Vậy trung bình cộng của các thông số là 35,625.

Bài 3: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Điểm số	Tần số (m)	Tích x.m	
4	2	8	
5	1	5	
6	2	12	
8	2	16	
9	2	18	
10	1	10	$\overline{X} = \frac{69}{10} = 6{,}9$
	N = 10	Tổng: 69	

Vậy trung bình cộng điểm của các em học sinh là 6,9.

Bài 4:

Giả sử:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có:

$$n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k.$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n}.$$

Giả sử a là số được đi ở mỗi biến lượng

Vậy giá trị của các biến lượng là:

$$(x_1 - a), (x_2 - a), (x_3 - a), \ldots, (x_k - a).$$

$$\Rightarrow \overline{X_1} = \frac{(x_1 - a)m_1 + (x_2 - a)m_2 + (x_3 - a)m_3 + \ldots + (x_k - a)m_k}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + (m_1 - m_2 - \ldots - m_k)a}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k - na}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n} - a = \overline{X} - a \text{ (đpcm)}$$

CHƯƠNG IV – BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

CHỦ ĐỀ 1 KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. BIỂU THỨC SỐ

Các số được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức số.

2. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Các biến được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức đại số.

☞ ***Chú ý***:

1. Trong biểu thức đại số, người ta cũng dùng các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
2. Trong biểu thức đại số, vì các chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.
   Thí dụ:
   - $x + y = y + x$, $xy = yx$ – *Tính chất giao hoán.*
   - $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(xy)z = x(yz)$ – *Tính chất kết hợp.*
   - $(x + y)z = xz + yz$ – *Tính chất phân phối.*
   - $xx = x^2$, $xxx = x^3$.
   - $-(x - y + z) = -x + y - z$ – *Quy tắc đổi dấu.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:*

a. (Bài 1.a/tr 26 – Sgk): *Tổng của* a *và* b.

b. (Bài 1.b/tr 26 – Sgk): *Tích của* a *và* b.

c. *Tổng của* a *và* b *lập phương.*

d. *Tổng các lập phương của* a *và* b.

e. *Lập phương của tổng* a *và* b.

f. (Bài 1.c/tr 26 – Sgk): *Tích của tổng* a *và* b *với hiệu của* a *và* b.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay $a + b$.

b. Ta có ngay ab.

c. Ta có "Tổng của a và b lập phương" là $a + b^3$.

d. Ta có "Tổng các lập phương của a và b" là $a^3 + b^3$.

e. Ta có "Lập phương của tổng a và b" là $(a + b)^3$.

f. Ta có ngay $(a + b)(a - b)$.

Ví dụ 2: *Cho hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng* a *và* b.

a. *Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.*

b. *Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.*

✍ *Giải*

a. Ta có chu vi hình chữ nhật (CV) được cho bởi:

$CV = 2(a + b)$.

b. Ta có diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi:

$S = ab$.

Ví dụ 3: *Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng* 2cm. *Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.*

✍ *Giải*

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 2.

Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi:

$x(x + 2)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x − 2.

Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi:

$x(x - 2)$.

Ví dụ 4: (Bài 2/tr 26 – Sgk): *Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có đáy lớn là* a, *đáy nhỏ là* b, *đường cao là* h (a, b và h *có cùng đơn vị*).

✍ *Giải*

Diện tích hình thang được viết như sau:

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h.$$

Công thức trên được đọc là "*Diện tích hình thang bằng đáy lớn cộng đáy nhỏ nhân chiều cao chia đôi*".

Ví dụ 5: *Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau*:

a. $x^2 + 8$ b. $9x^3$ c. $(x - 1)(x + 1)$

✍ Giải

a. Ta đọc $x^2 + 8$ là:

" Tổng của x bình phương và 8 ".

b. Ta đọc $9x^3$ là:

" Tích của 9 và x lập phương ".

c. Ta đọc $(x-1)(x + 1)$ là:

" Tích của hiệu hai số x và 1 với tổng của chúng ".

Ví dụ 6: *Viết biểu thức đại số hiển thị*:

a. *Số giờ đi hết quãng đường* AB *dài* x (km) *của một người đi xe máy với vận tốc* 30km/h.

b. *Tổng quãng đường đi của một người, biết*:

- *Người đó đi bộ trong* x *giờ với vận tốc* 5 km/h.
- *Người đó đi xe đạp trong* y *giờ với vận tốc* 12 km/h.
- *Người đó đi xe máy trong* z *giờ với vận tốc* 30 km/h.

✍ *Giải*

a. Người đi xe máy đi quãng đường AB dài x km với vận tốc 30km/h mất một khoảng thời gian bằng $\frac{x}{30}$ (giờ).

b. Ta có:

- Quãng đường người đó đi bộ trong x giờ với vận tốc 5 km/h là:
  5.x (km).
- Quãng đường người đó đi xe đạp trong y giờ với vận tốc 12 km/h là:
  12.y (km).
- Quãng đường người đó đi xe máy trong z giờ với vận tốc 30 km/h là:
  30.z (km).

Vậy, tổng quãng đường đi của người đó là: 5x + 12y + 30z (km).

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a. Tổng của a bình phương và b lập phương.

b. Hiệu các lập phương của a và b.

c. Lập phương của hiệu a và b.

Bài 2: Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau:

a. $x^3 - 1$ b. $5 : x^2$ c. $(x + 8)(x - 2)$

Bài 3: Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2cm.

Bài 4: Viết biểu thức tính diện tích của hình thang có đáy lớn bằng hai đáy nhỏ và đường cao là h.

Bài 5: Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a. Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2.

b. Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3.

Bài 6: Trong hoá đơn thu tiền điện của một hộ gia đình, chỉ số điện tiêu thụ là 250 số. Hỏi người đó phải trả bao nhiêu tiền nếu:

a. Hoá đơn được tính theo hệ số 1, nghĩa là:

- 100 số đầu tiên họ phải trả a đồng/1 số điện.
- 100 số tiếp theo họ phải trả b đồng/1 số điện.
- Và từ số 201 trở đi họ phải trả c đồng/1 số điện.

b. Hoá đơn được tính theo hệ số 2, nghĩa là:

- 50 số đầu tiên họ phải trả a đồng/1 số điện.
- 50 số tiếp theo họ phải trả b đồng/1 số điện.
- Và từ số 101 trở đi họ phải trả c đồng/1s ố điện.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Ta có, tổng của a bình phương và b lập phương là: $a^2 + b^3$.

b. Ta có, hiệu các lập phương của a và b là: $a^3 - b^3$.

c. Ta có, lập phương của tổng a và b là: $(a - b)^3$.

Bài 2:

a. Ta đọc $x^3 - 1$ là:

" Hiệu của x lập phương và 1 ".

b. Ta đọc $5 : x^2$ là:

" Thương của 5 và x bình phương ".

c. Ta đọc $(x + 8)(x - 2)$ là:

" Tích của tổng hai số x và 8 với hiệu hai số x và 2 ".

Bài 3:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 2.

Do đó, biểu thức diện tích: $x(x + 2)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x - 2.

Do đó biểu thức diện tích: $x(x - 2)$.

Bài 4:

Cách 1: Giả sử hình thang có đáy nhỏ bằng a, suy ra đáy lớn bằng 2a.

Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi: $\dfrac{(a + 2a)h}{2} = \dfrac{3}{2}ah$.

Cách 2: Giả sử hình thang có đáy lớn bằng a, suy ra đáy nhỏ bằng $\dfrac{a}{2}$.

Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi: $\dfrac{(a + \frac{a}{2})h}{2} = \dfrac{3}{4}ah$.

Bài 5:

a. Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Vậy, số đó là: 5.a + 1

Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2. Ta được:

$$5.a + 1 + 2 = 6b + 2.$$

b. Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Vậy, số đó là: 8.a + 5.

Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3.

$$8.a + 5 - 9 = 11.b + 3$$

Bài 6:

a. Nếu hoá đơn được tính theo hệ số 1, ta có:

- Số tiền của 100 số đầu tiên là: 100a đồng.
- Số tiền của 100 số tiếp theo là: 100b đồng.
- Số tiền của 50 số tiếp theo là: 50c đồng.

Vậy, tổng số tiền họ phải trả là: 100a + 100b + 50c (đồng)

b. Nếu hoá đơn được tính theo hệ số 2, ta có:

- Số tiền của 50 số đầu tiên là: 50a đồng.
- Số tiền của 50 số tiếp theo là: 50b đồng.
- Số tiền của 150 số tiếp theo là: 150c đồng.

Vậy, tổng số tiền họ phải trả là: 50a + 50b + 150c (đồng)

CHỦ ĐỀ 2

GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

☞ *Chú ý*: Để phát triển bài toán tính giá trị của biểu thức đại số, người ta thường yêu cầu "*Xây dựng biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức trong một hoặc nhiều trường hợp cụ thể*".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Tính giá trị của biểu thức* $x^2 + 3x - 12$ tại $x = 7$ và tại $x = 8$.

✍ *Giải*

a. Thay $x = 7$ vào biểu thức đã cho, ta được: $7^2 + 3.7 - 12 = 58$.
   Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = 7$ bằng 58.

b. Thay $x = 8$ vào biểu thức đã cho, ta được: $8^2 + 3.8 - 12 = 76$.
   Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = 8$ bằng 76.

☞ *Chú ý*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS tính giá trị của biểu thức trên tại các giá trị x khác nhau chúng ta thực hiện như sau:

Ta lần lượt:

- Nhập biểu thức $x^2 + 3x - 12$ vào máy, bằng cách ấn:
  [ALPHA] [X] [x^2] [+] 3 [ALPHA] [X] [−] 12
- Lưu trữ biểu thức vào bộ nhớ CACL, bằng cách ấn:
  [CACL]
- Để nhận được giá trị của hàm số với X = 7, ta ấn:
  7 [=] → 58
- Để nhận được giá trị của hàm số với X = 8, ta ấn:
  [CACL] 8 [=] → 76

Trong đó:

1. Dấu [=] được nhập vào bằng phím màu đỏ trên bàn phím của máy tính.
2. Biểu thức lưu trữ trong bộ nhớ CACL bị xoá khi ta:
   - Thực hiện một phép toán khác.
   - Thay đổi Mode khác.
   - Tắt máy tính.

Ví dụ 2: *Tính giá trị của biểu thức* $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$.

✍ *Giải*

Thay $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$$1^2.\ \frac{1}{2} + 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Vậy, giá trị của biểu thức $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ bằng $\frac{3}{4}$.

☞ ***Chú ý***: Sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS tính giá trị của biểu thức trên chúng ta thực hiện như sau:

- Nhập biểu thức $x^2y + xy^2$ vào máy, bằng cách ấn:
  [ALPHA] [X] [x^2] [ALPHA] [Y] [+] [ALPHA] [X] [ALPHA] [Y] [x^2]
- Ấn [CACL]
- Để nhập giá trị của $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$, ta ấn:
  1 [=] — màn hình: Y? 1
  1 [$a^{b/c}$] 2 [=] — màn hình: 3⌟4

Ví dụ 3: *Tính giá trị của biểu thức*: $a - 2b^2 + c^3$ tại $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$.

✍ *Giải*

Thay $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$ vào biểu thức, ta được:

$4 - 2(-1)^2 + (-1)^3 = 4 - 2 - 1 = 1.$

Vậy, giá trị của biểu thức $a - 2b^2 + c^3$ tại $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$ bằng 1.

☞ ***Chú ý***:

1. Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS tính giá trị của biểu thức trên chúng ta thực hiện như sau:
   - Nhập biểu thức $a - 2b^2 + c^3$ vào máy, bằng cách ấn:
     [ALPHA] [A] [–] 2 [ALPHA] [B] [x^2] [+] [ALPHA] [C] [^] [3]
   - Ấn [CACL]
   - Để nhập giá trị của $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$, ta ấn:
     4 [=] — màn hình: B? 1
     [(–)] 1 [=] — màn hình: C? 1
     [(–)] 1 [=] — màn hình: 1
2. Để phát triển bài toán tính giá trị của biểu thức đại số, người ta thường yêu cầu chúng ta " *Xây dựng biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức trong một hoặc nhiều trường hợp cụ thể*". Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Ví dụ 4: *Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được* x *lít. Cùng lúc đó một vòi nước khác chảy từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng* $\frac{1}{4}$ *lượng nước chảy vào.*

a. *Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong* y *phút.*

b. *Tính số nước có thêm trong bể trên, biết* $x = 36$, $y = 60$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng, lượng nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong mỗi phút bằng $\frac{3}{4}$ lượng nước chảy vào, tức là bằng $\frac{3}{4}x$.

Do đó, số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút bằng $\frac{3}{4}xy$ (lít).

b. Thay x = 36, y = 60 vào biểu thức trên, ta được:

$$\frac{3}{4}.36.60 = 1620 \text{ lít.}$$

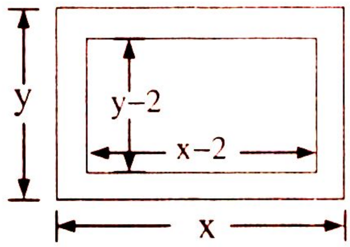
Vậy, số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên với x = 36, y = 60 bằng 1620 lít.

Ví dụ 5: *Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng* x(m), *chiều rộng bằng* y(m) (*với* x, y > 2). *Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng* 1(m).

a. *Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.*

b. *Tính diện tích khu đất trồng trọt biết* x = 14m, y = 10m.

✍ *Giải*



a. Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với:

- Chiều dài bằng x – 2.
- Chiều rộng bằng y – 2.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt bằng:

$(x - 2)(y - 2)$.

b. Thay x = 14m, y = 10m vào biểu thức trên, ta được:

$(14 - 2)(10 - 2) = 12.8 = 96m^2$.

Vậy, diện tích của phần đất trồng trọt với x = 14m, y = 10m bằng $96m^2$.

Ví dụ 6: *Một người công nhân lắp máy được hưởng lương như sau:*

Lương cứng: 20 đồng / tháng.

Lương trách nhiệm (nếu có): 5 đồng / tháng.

Lương làm thêm (nếu có): 1 đồng / 1 sản phẩm.

Hỏi, mức lương của anh An là bao nhiêu nếu:

a. *Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm.*

b. *Trong một tháng, anh* An *được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm.*

✍ *Giải*

a. Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm. Do đó, lương của anh An là:

$$20 + 1 . 4 = 24 \text{ (đồng).}$$

b. Trong một tháng, anh An được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm.

Do đó, lương của anh An là:

$$20 + 5 + 1 . 3 = 28 \text{ (đồng)}.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho biểu thức:

$$9x^2 + 3x - 1.$$

Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1$ và tại $x = \frac{1}{3}$.

Bài 2: Cho biểu thức $4x^2 + 6x - 8$. Tính giá trị của biểu thức tại:

a. $x = 3$. b. $x = -2$. c. $x = -\frac{1}{2}$.

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$.

Bài 4: Cho biểu thức $(x^2y - 2x - 2z)xy$. Tính giá trị của biểu thức tại:

d. $x = 1, y = -1, z = 3$. e. $x = -\frac{1}{2}, y = 4, z = -3$.

Bài 5: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng x(m), chiều rộng bằng y(m) (với x, y > 4). Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2(m).

a. Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.

b. Tính diện tích khu đất trồng trọt biết x = 16m, y = 12m.

Bài 6: Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được x lít. Cùng lúc đó một vòi nước khác chảy từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ lượng nước chảy vào.

a. Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút.

b. Tính số nước có thêm trong bể trên, biết x = 27, y = 30.

Bài 7: Hoá đơn thu tiền điện thoại của một hộ gia đình được tính như sau:

Thuê bao hàng tháng là 27000 đồng (bắt buộc).

200 phút đầu tiên họ phải trả 120 đồng/1phút.

500 số tiếp theo họ phải trả 80 đồng/1 phút.

Và từ số 701 trở đi họ phải trả 40 đồng/1 phút.

Hỏi gia đình đó phải thanh toán bao nhiêu tiền điện thoại nếu:

a. Một tháng họ sử dụng hết 680 phút.

b. Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Thay $x = -1$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$$9(-1)^2 + 3(-1) - 1 = 9.1 - 3 - 1 = 5.$$

Vậy, giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = -1$ bằng 5.

b. Thay $x = \frac{1}{3}$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3.\frac{1}{3} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1.$

Vậy, giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = \frac{1}{3}$ bằng 1.

Bài 2:

a. 46. b. -4. c. -10.

Bài 3: Thay $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$ vào biểu thức, ta được:

$(-3)^3 - 2.3 + (-2)^5 = -27 - 6 - 32 = -65.$

Vậy, giá trị của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$ bằng -65.

Bài 4:

a. 9. b. -16.

Bài 5:

a. Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với:

- Chiều dài bằng $x - 4$.
- Chiều rộng bằng $y - 4$.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt bằng $(x - 4)(y - 4)$.

b. Thay $x = 16$m, $y = 12$m vào biểu thức trên, ta được:

$(16 - 4)(12 - 4) = 12.8 = 96m^2.$

Vậy, diện tích của phần đất trồng trọt với $x = 16$m, $y = 12$m bằng $96m^2$.

Bài 6:

a. $\frac{xy}{3}$ (lít).

b. 270 lít.

Bài 7:

a. Một tháng họ sử dụng hết 680 phút. Do đó, số tiền chi tiết như sau:

- Thuê bao hàng tháng là 27000 (đồng).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả:

  120 . 200 = 24000 (đồng).
- 480 số tiếp theo họ phải trả:

  80 . 480 = 38400 (đồng).

Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là:

27000 + 24000 + 38400 = 89400 (đồng).

b. Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút. Do đó, số tiền chi tiết như sau:

- Thuê bao hàng tháng là 27000 (đồng).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả:

  120 . 200 = 24000 (đồng).
- 500 số tiếp theo họ phải trả:

  80 . 500 = 4000 (đồng).
- 328 số tiếp theo họ phải trả:

  40 . 328 = 13120 (đồng).

Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là:

27000 + 24000 + 40000 + 13120 = 104120 (đồng).

CHỦ ĐỀ 3

ĐƠN THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƠN THỨC

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Số 0 được gọi là đơn thức không.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, một biểu thức đại số nếu có chứa một trong các phép toán +, −, : (số cho biến hoặc biến cho biến) thì sẽ không phải là đơn thức.

2. ĐƠN THỨC THU GỌN

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Trong đó:

- Số nói trên được gọi là hệ số của đơn thức thu gọn.
- Phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

☛ ***Chú ý***:

- Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn.
- Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn ta viết hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo thứ tự bảng chữ cái.

3. BẬC CỦA MỘT ĐƠN THỨC

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

☛ ***Chú ý***: Một số là đơn thức thu gọn có bậc bằng 0.

4. NHÂN HAI ĐƠN THỨC

Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

☛ ***Nhận xét***:

- Tích của hai đơn thức là một đơn thức.
- Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn, thí dụ:

$$3x^2y(-4)xy^3(-8)y = 96x^3y^5.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao ?) và nếu là đơn thức hãy chỉ ra bậc của nó:*

a. $-\frac{1}{2}$. b. a. c. $2xy^2.3z$. d. $2x - y$.

Giải

a. $-\frac{1}{2}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số.

Đơn thức này có bậc bằng 0.

b. a là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến.

Đơn thức này có bậc bằng 1.

c. $2xy^2.3z$ là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến.

Đơn thức này có bậc bằng 1 + 2 + 1 = 4.

d. 2x − y không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ.

Ví dụ 2: *Cho hai chữ số x, y. Hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thức là đơn thức còn một biểu thức không là đơn thức.*

Giải

Với hai chữ số x, y, ta có:

- Đơn thức là 2xy (hoặc x, 3y, $4x^2y^2$,...).
- x − y (hoặc x + 2y, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\frac{x}{y}$,...) không là đơn thức.

Nhận xét: Như vậy, một biểu thức đại số nếu có chứa một trong các phép toán +, −, : (số cho biến hoặc biến cho biến) thì sẽ không phải là đơn thức.

Ví dụ 3: *Cho hai chữ số x, y. Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 4 còn một là đơn thức bậc 6.*

Giải

Với hai chữ số x, y, ta có:

- Đơn thức thu gọn bậc 4 là $6x^3y$ (hoặc $4x^4$, $2y^4$, $6xy^3$,...).
- Đơn thức thu gọn bậc 6 là $6xy^5$ (hoặc x^6, $3y^6$, $4x^3y^3$,...).

Chú ý: Một số là đơn thức thu gọn có bậc bằng 0.

Ví dụ 4: *Cho đơn thức* $3xy^2z^3(-2xy^4)$. *Thu gọn đơn thức và chỉ ra hệ số cùng bậc của nó.*

Giải

Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$3xy^2z^3(-2xy^4) = [3.(-2)].(xy^2z^3.xy^4) = -6.(x.x)(y^2.y^4).z^3 = -6x^2y^6z^3.$$

Như vậy, đơn thức có:

- Hệ số bằng −6.
- Có bậc bằng 2 + 6 + 3 = 11.

Ví dụ 5: *Cho hai đơn thức* $\frac{2}{3}a^2b$ *và* $\frac{3}{2}ab^2c$. *Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.*

✍ *Giải*

Ta có: $\frac{2}{3}a^2b.\frac{3}{2}ab^2c = \left(\frac{2}{3}.\frac{3}{2}\right).(a^2b.ab^2c) = (a^2.a).(b.b^2).c = a^3b^3c.$

Khi đó, đơn thức a^3b^3c có hệ số bằng 1 và có bậc bằng 3 + 3 + 1 = 7

☞ ***Nhận xét***:

1. Tích của hai đơn thức là một đơn thức.
2. Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn, thí dụ:

   $3x^2y(-4)xy^3(-8)y = 96x^3y^5$.

Ví dụ 6: *Cho hai đơn thức $-x^8y^8z^9$ và $6xy^3$. Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.*

✍ *Giải*

Ta có: $-x^8y^8z^9.6xy^3 = (-1.6).(x^8y^8z^9.xy^3) = -6(x^8.x).(y^8.y^3).z^9 = -6x^9y^{11}z^9$.

Khi đó, đơn thức $-6x^9y^{11}z^9$ có hệ số bằng –6 và có bậc bằng 9 + 11 + 9 = 29.

Ví dụ 7: *Thu gọn các đơn thức rồi chỉ ra phần hệ số và bậc của chúng:*

a. $6x.(-8x^2y).(9x^3y^2z)$.

b. $2x^6yz^4.(-\frac{1}{4}y^2z^3).(2xz^6)$.

✍ *Giải*

a. Viết lại đơn thức dưới dạng:

$[6.(-8).9].(x.x^2y.x^3y^2z) = -432(x.x^2.x^3)(y.y^2).z = -432x^6y^3z$.

Như vậy, đơn thức có:

- Hệ số bằng –432.
- Có bậc bằng 6 + 3 + 1 = 10.

b. Viết lại đơn thức dưới dạng:

$[2.(-\frac{1}{4}).2].(x^6yz^4.y^2z^3.xz^6) = -(x^6.x)(y.y^2).(z^4.z^3.z^6) = -x^7y^3z^{13}$.

Như vậy, đơn thức có:

- Hệ số bằng –1.
- Có bậc bằng 7 + 3 + 13 = 21.

Ví dụ 8: *Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng.*

✍ *Giải*

Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng 2x do đó biểu thức diện tích:

$2x.x = 2x^2$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao ?):

a. $-\frac{6}{11}$. b. y^9. c. $3xy.2xz$. d. $8x - 3y^2$.

Bài 2: Cho ba chữ số x, y, z.

a. Hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thức là đơn thức còn một biểu thức không là đơn thức.

b. Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 8 còn một là đơn thức bậc 9.

Bài 3: Cho biết phần hệ số và phần biến của các đơn thức sau rồi tính giá trị của chúng tại $a = 1$, $b = 2$ và $c = -1$:

a. $5{,}8a^2bc^8$. b. $0{,}12^2abc^{11}$.

Bài 4: Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

a. $\frac{5}{2}a^2b^3c^6$ và $-2a^6d^9$. b. 2^4xy^4 và $\frac{3}{4}x^6y^8z^9$.

Bài 5: Thu gọn các đơn thức rồi tìm hệ số và bậc của chúng:

b. $x^2.y.(-2xy^2z).(-3x^3y^4z^8)$.

c. $\frac{2}{3}x^3y^2z^4.(\frac{1}{4}xy^2z^3).(12xyz^2)$.

Bài 6: Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng.

Bài 7: Hãy viết các đơn thức với biến a, b và có giá trị bằng 18 tại $a = -2$ và $b = 1$.

Bài 8: Tính giá trị của các đơn thức sau:

a. $8xy^2z^3$ với $x = 3$, $y = 2$ và $z = -1$. b. $\frac{2}{5}x^2y^4$ với $x = 5$ và $y = -1$.

c. $-\frac{1}{81}x^2y$ với $x = -3$ và $y = 8$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $-\frac{6}{11}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số.

b. y^9 là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến.

c. $3xy.2xz$ là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến.

d. $8x - 3y^2$ không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ.

Bài 2:

a. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

- Đơn thức là xyz^2 (hoặc x, 6y, 8z, $9xyz^2$,...).
- $xy + z$ (hoặc $x - 6yz$, $\frac{1}{x}$, $\frac{9x}{yz}$,...) không là đơn thức.

b. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

- Đơn thức thu gọn bậc 8 là x^6yz (hoặc $2x^8$, $8y^8$, $9z^8$, x^6y^2,...).
- Đơn thức thu gọn bậc 9 là $6x^4y^2z^3$ (hoặc x^9, $6y^9$, $9x^3z^6$,...).

Bài 3:

a. Đơn thức $5,8a^2bc^8$ có phần hệ số là 5,8 và phần biến là a^2bc^8.

Thay a = 1, b = 2 và c = –1 vào $5,8a^2bc^8$. Ta được:

$$5,8 \,.\, 1^2 \,.\, 2 \,.\, (-1)^8 = 5,8 \,.\, 2 = 11,6$$

b. Đơn thức $0,12^2xyz^{11}$ có phần hệ số là $0,12^2$ và phần biến là xyz^{11}.

Thay a = 1, b = 2 và c = –1 vào $0,12^2xyz^{11}$. Ta được:

$$0,12^2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, (-1)^{11} = 0,12^2 \,.\, 2(-1) = -0,0288.$$

Bài 4:

a. Ta có: $\frac{5}{2}a^2b^3c^6.(-2a^6d^9) = [\frac{5}{2}.(-2)].(a^2b^3c^6.a^6d^9) = -5a^8b^3c^6d^9$.

Khi đó, đơn thức $-5a^8b^3c^6d^9$ có hệ số bằng –5 và có bậc bằng 26.

b. Ta có: 2^4xy^4 và $\frac{3}{4}x^6y^8z^9$

$$2^4xy^4.\ \frac{3}{4}x^6y^8z^9 = (2^4.\ \frac{3}{4}).(xy^4.x^6y^8z^9) = 12x^7y^{12}z^9.$$

Khi đó, đơn thức $12x^7y^{12}z^9$ có hệ số bằng 12 và có bậc bằng 28.

Bài 5:

a. Ta được $6x^6y^7z^9$ nó có hệ số bằng 6 và có bậc bằng 22.

b. Ta được $2x^5y^5z^9$ nó có hệ số bằng 2 và có bậc bằng 19.

Bài 6: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng 3x, do đó biểu thức diện tích: $3x.x = 3x^2$.

Bài 7: Các đơn thức với biến a, b và có giá trị bằng 18 tại a = –2 và b = 1. Chẳng hạn:

- – 9ab. Thật vậy: $-9.(-2).1 = 9 \,.\, 2 = 18$
- $\frac{18}{4}.a^2b$. Thật vậy: $\frac{18}{4}.(-2)^2.\ 1 = 18$.

Bài 8:

a. Thay x = 3, y = 2 và z = – 1 vào $8xy^2z^3$. Ta được:

$$8 \,.\, 3 \,.\, 2^2 \,.\, (-1)^3 = 8 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, (-1) = -96.$$

b. Thay x = 5 và y = – 1 vào $-\frac{2}{5}x^2y^4$. Ta được:

$$\frac{2}{5} \,.\, 5^2 \,.\, (-1)^4 = \frac{2}{5} \,.\, 25 \,.\, 1 = 2 \,.\, 5 = 10.$$

c. Thay x = –3 và y = 9 vào $\sqrt{\frac{1}{81}x^2y}$. Ta được:

$$\sqrt{\frac{1}{81}}.\ (-3)^2 \,.\, 8 = \sqrt{\frac{1}{81}}.\ 9 \,.\, 8 = \frac{-8}{9}.$$

CHỦ ĐỀ 4 # ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

☞ ***Chú ý***: Tất cả số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

2. CỘNG, TRỪ CÁC ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Để cộng (hoặc trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hoặc trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

☞ ***Chú ý***: Phép cộng, trừ các đơn thức đồng dạng còn được sử dụng trong bài toán tính giá trị của biểu thức.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Trong các đơn thức sau, hãy chỉ ra đơn thức đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.*

a. $-ab^6$. b. $\frac{2}{ab^6}$. c. $\frac{1}{4}ab^6$. d. $ab^6 - a$.

✍ *Giải*

Ta có ngay:

- Các đơn thức $-ab^6$, $\frac{1}{4}ab^6$ đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.
- Các đơn thức $\frac{2}{ab^6}$, $ab^6 - a$ không đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

Ví dụ 2: *Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau:* $-2xy^2z$, $6x^2yz$, $\frac{3}{2}xy^2z$, $8xzy^2$, $\frac{3}{4}x^2yz$.

✍ *Giải*

Ta có ngay:

- Các đơn thức $-2xy^2z$, $\frac{3}{2}xy^2z$, $8xzy^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^2yz$, $\frac{3}{4}x^2yz$ đồng dạng với nhau.

Ví dụ 3: *Thực hiện phép tính*:

a. $3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$. b. $\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3$.

Giải

a. Ta có:

$$3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2 = (3 + \frac{3}{2})xy^2 = \frac{9}{2}xy^2.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3 = (\frac{1}{2} - 2)x^4y^3 = -\frac{3}{2}x^4y^3.$$

Ví dụ 4: *Thực hiện phép tính:*

a. $3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3$. b. $6x^4y - 5x.3x^3y + 4x^2.2xy.3x$.

Giải

a. Ta có:

$$3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3 = (3 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3})x^2y^3 = \frac{8}{3}x^2y^3.$$

b. Ta có:

$$6x^4y - 5x.3x^3y + 4x^2.2xy.3x = 6x^4y - (5.3).(x.x^3y) + (4.2.3).(x^2.xy.x)$$
$$= 6x^4y - 15x^4y + 24x^4y = (6 - 15 + 24)x^4y = 15x^4y.$$

Chú ý: Phép cộng, trừ các đơn thức đồng dạng còn được sử dụng trong bài toán tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 5: *Tính giá trị của biểu thức* $2abc - 3a^3c + 8$ *tại* $a = 1$ *và* $b = \frac{3}{2}$.

Giải

Thay $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$$2.1.\frac{3}{2}.c - 3.1^3.c + 8 = 3c - 3c + 8 = 8.$$

Vậy, giá trị của biểu thức $2abc - 3a^3c + 8$ tại $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ bằng 8.

Ví dụ 6: *Cho biểu thức* $3x.2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4x^2.\frac{1}{3}y$.

a. *Thực hiện đơn giản biểu thức.*

b. *Tính giá trị của biểu thức* với $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$.

Giải

a. Ta có: $3x.2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4x^2.\frac{1}{3}y = 6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - \frac{4}{3}x^2y = (6 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3})x^2y$
$= 4x^2y$.

b. Thay $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ vào đơn thức $4x^2y$, ta được: $4.(-2)^2.\frac{1}{8} = 2$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ bằng 2.

Ví dụ 7: *Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6cm. Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.*

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 6.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi:

$2(x + x + 6) = 2(2x + 6)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x – 6.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi:

$2(x + x - 6) = 2(2x - 6)$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau:

a. $6x^2yz^2$ b. $6x^3y^2z$ c. $\frac{7}{5}x^2yz^2$ d. $-4x^3zy^2$ e. $\frac{3}{4}x^3y^2z$

Bài 2: Các cặp đơn thức sau có đồng dạng hay không ?

a. $4\frac{1}{2}x^8$ và $-0.25x^8y$.

b. $11xy^4z^2$ và $\frac{7}{8}xy^4z$.

c. $\frac{11}{8}x^8y^4z$ và $9x^8y^4z$.

d. $-3xy^2z^3$ và $\frac{3}{5}xy^2z^6$.

Bài 3: Thực hiện phép tính:

a. $x^2 + 6x^2 - 0,75x^2$.

b. $8xy^2 - 0,25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2$.

c. $1,5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1,8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3$.

Bài 4: Cho biểu thức:

$$6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y.$$

a. Thực hiện đơn giản biểu thức.

b. Tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$.

Bài 5: Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8cm. Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.

Bài 6: Điền đơn thức vào ô trống:

a. $4x^2 + \square = 6x^2$.

b. $\square - 9x^2y^3 = -6x^2y^3$.

c. $\square - \square + x^3yz^2 = 9x^3yz^2$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có ngay:

- Các đơn thức $6x^2yz^2$, $\frac{7}{5}x^2yz^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^3y^2z$, $-4x^3zy^2$, $\frac{3}{4}x^3y^2z$ đồng dạng với nhau.

Bài 2: Ta có ngay:

a. Không đồng dạng.

b. Không đồng dạng.

c. Đồng dạng.

d. Không đồng dạng.

Bài 3:

a. Ta có: $x^2 + 6x^2 - 0{,}75x^2 = 6{,}25x^2$.

b. Ta có: $8xy^2 - 0{,}25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2 = 8{,}5xy^2$.

c. Ta có: $1{,}5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1{,}8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3 = 6\frac{19}{30}xy^2z^3$.

Bài 4:

a. Ta có: $6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y = (6 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{6})x^2y = \frac{9}{2}x^2y$.

b. Thay $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ vào biểu thức $\frac{9}{2}x^2y$ ta được $\frac{9}{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^2.2 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ bằng 1.

Bài 5: Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 8.
Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x + 8) = 2(2x + 8).$$

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x – 8.
Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x - 8) = 2(2x - 8).$$

Bài 6:

a. $2x^2$.

b. $3x^2y^3$.

c. Có nhiều cách điền, thí dụ:

$$\boxed{9x^3yz^2} - \boxed{x^3yz^2} + x^3yz^2 = 9x^3yz^2.$$

CHỦ ĐỀ 5

ĐA THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐA THỨC

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

Để cho gọn, người ta thường kí hiệu các đa thức bằng các chữ cái in hoa A, B, P, Q,.... Thí dụ ta đặt: $P = x^2y + 1 - \frac{2}{3}xy + 4xy^2 - \frac{1}{2}x^2y + 8$.

A. THU GỌN ĐA THỨC

Thu gọn một đa thức là việc chuyển đa thức đó về dạng không còn hai hạng tử nào đồng dạng. Ta gọi đa thức mới là dạng thu gọn của đa thức ban đầu.

B. BẬC CỦA ĐA THỨC

Bậc của một đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

☛ ***Chú ý:***

- Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.
- Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết ta phải thu gọn đa thức đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hãy thu gọn đa thức sau:* $P = 4x^3y^2z - \frac{1}{2}xy^2z + 6x^3y^2z + 1{,}25x^3y^2z$.

✍ *Giải*

Ta được: $P = 10x^3y^2z + 0{,}75x^3y^2z$.

Ví dụ 2: *Tìm bậc của đa thức:* $P = 6x^4 + 3x^5 - 3x^2y - 3x^5 + 1 - 6x^4$.

✍ *Giải*

Thu gọn đa thức P về dạng: $P = -3x^2y + 1$.

Suy ra, đa thức P có bậc bằng 3.

Ví dụ 3: *Lập biểu thức đại số chứa các biến* x, y, z *mà:*

a. *Biểu thức đó vừa là đơn thức, vừa là đa thức.*

b. *Biểu thức đó chỉ là đa thức.*

✍ *Giải*

a. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

Biểu thức vừa là đơn thức, vừa là đa thức là: x^2yz^3 (hoặc x^2, $8y$, $5xz$, $9x^2y^2z^8$,...).

b. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

Biểu thức chỉ là đa thức là: $2x^2 + 3y^3 + 5z^5$ (hoặc $8x - 6yz^2$, $\frac{8}{x}$, $\frac{9x}{yz}$,...)

Ví dụ 4: *Tính giá trị của các đa thức sau:*

a. $5x^2y + 8xy^2 - 10x^2y^2$ *tại* $x = -1$ *và* $y = -3$.

b. $x^2y^3 - 2xy^2 + x^8y^8$ *tại* $x = -1$ *và* $y = 1$.

Giải

a. Thay $x = -1$ và $y = -3$ vào $5x^2y + 8xy^2 - 10x^2y^2$. Ta được:

$5(-1)^2.(-3) + 8.(-1).(-3)^2 - 10(-1)^2(-3)^2$

$= 5.(-3) + 8.(-1).9 - 10.9 = -15 - 72 - 90 = -177.$

b. Thay $x = -1$ và $y = 1$ vào $x^2y^3 - 2xy^2 + x^8y^8$. Ta được:

$(-1)^2.1^3 - 2(-1).1^2 + (-1)^8.1^8 = 1 + 2 + 1 = 4.$

Ví dụ 5: *Thu gọn đa thức sau:*

a. $A = 8x^2 + 2xy^2 - 5x^2y^2 - 2xy^2 + 5x^2y^2.$

b. $B = -\frac{2}{3}x^2y^2 + 5x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 - y^7 - 5x^2y^2z^2.$

Giải

a. Thu gọn đa thức A về dạng: $A = 8x^2 + 2xy^2 - 5x^2y^2 - 2xy^2 + 5x^2y^2$

$= 8x^2 + (2xy^2 - 2xy^2) - (5x^2y^2 + 5x^2y^2) = 8x^2 + 0 - 0 = 8x^2.$

b. Thu gọn đa thức B về dạng:

$B = -\frac{2}{3}x^2y^2 + 5x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 - y^7 - 5x^2y^2z^2$

$= (-\frac{2}{3}x^2y^2 + 2x^2y^2) + (5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z^2) - y^7 = x^2y^2(2 - \frac{2}{3}) + 0 - y^7 = \frac{4}{3}x^2y^2 - y^7.$

Ví dụ 6: *Cho đa thức:* $P = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 8$

a. *Biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức.*

b. *Biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức.*

Giải

a. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức như sau:

$P = (5x^5 - 4x^4) + (3x^3 - 2x^2 + x - 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 + 3x^3) + (-2x^2 + x - 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 - 2x^2 + x) + (3x^3 - 8)$;

...

b. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức như sau:

$P = (5x^5 - 4x^4 + 3x^3) - (2x^2 - x + 8)$;

$P = (5x^5) - (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 - 2x^2 + x) - (-3x^3 + 8)$;

...

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm bậc của đa thức:

a. $A = 2x^4 + 3x^5 - 8x^2y^2 - 3x^5 + 9 - 2x^4.$

b. $B = 4x^5y^2 - 3xy^2 + 7x^2y + 2xy^2 - 7x^2y.$

Bài 2: Tính giá trị của các đa thức sau:

c. $A = x^2y + 3xy^2 - 5x^2y^2 + 8xy$ tại $x = -1$ và $y = 2$.

d. $B = 4x^3 + x^2y - x^4y^4 + xy + 11$ tại $x = 1$ và $y = -1$.

Bài 3: Thu gọn đa thức sau:

a. $A = \frac{1}{2}x^2yz + 2xy^2z - xyz^2 - 2x^2yz - 2xy^2z + xyz^2$.

b. $B = -\frac{1}{3}x^2y^2 + y^2z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2$.

Bài 4: Cho đa thức $P = 6x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x - 9$

a. Biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức.

b. Biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Ta có: $A = 2x^4 + 3x^5 - 8x^2y^2 - 3x^5 + 9 - 2x^4$

$= 2x^4 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^5 - 8x^2y^2 + 9 = -8x^2y^2 + 9$

Vậy, đa thức A có bậc bằng 4.

b. Ta có: $B = 4x^5y^2 - 3xy^2 + 7x^2y + 2xy^2 - 7x^2y$

$= 4x^5y^2 - 3xy^2 + 2xy^2 + 7x^2y - 7x^2y = 4x^5y^2 - xy^2$.

Vậy, đa thức B có bậc bằng 7.

Bài 2:

a. Thay $x = -1$ và $y = 2$ vào A. Ta được:

$A = (-1)^2.\ 2 + 3(-1).\ 2^2 - 5(-1)^2.\ 2^2 + 8(-1).\ 2$

$= 2 - 3\ .\ 4 + 5.\ 4 - 8\ .\ 2 = 2 - 12 + 20 - 16 = -6$

b. Thay $x = 1$ và $y = -1$ vào B. Ta được:

$B = 4.1^3 + 1^2.\ (-1) - 1^4(-1)^4 + 1.(-1) + 11 = 4 - 1 - 1 - 1 + 11 = 12$.

Bài 3:

a. Ta có: $A = \frac{1}{2}x^2yz + 2xy^2z - xyz^2 - 2x^2yz - 2xy^2z + xyz^2$

$= \frac{1}{2}x^2yz - 2x^2yz + 2xy^2z - 2xy^2z + xyz^2 - xyz^2 = -\frac{3}{2}x^2yz$.

b. Ta có $B = -\frac{1}{3}x^2y^2 + y^2z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2$

$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})x^2y^2 + y^2z^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2 = \frac{1}{6}x^2y^2 - 5x^2y^2 = \left(\frac{1}{6} - 5\right)x^2y^2 = \frac{-29}{6}x^2y^2$

Bài 4:

a. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức như sau:

$P = (6x^6 - 2x^5) + (3x^4 - 2x^3 + x - 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + 3x^4) + (-2x^3 + x - 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 - 2x^3 + x) + (3x^4 - 9)$.

...

b. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức như sau:

$P = (6x^6 - 2x^5) - (-3x^4 + 2x^3 - x + 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + 3x^4) - (2x^3 - x + 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + x - 9) - (2x^3 + 3x^4)$.

CHỦ ĐỀ 6 # CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CỘNG HAI ĐA THỨC

Để cộng đa thức $P = x^2 + 6x + 5$ với đa thức $Q = -3x + 9$, ta thực hiện:

$P + Q = (x^2 + 6x + 5) + (-3x + 9)$ – *Đặt phép toán*

$= x^2 + 6x + 5 - 3x + 9$ – *Thực hiện phép bỏ dấu ngoặc*

$= x^2 + (6x - 3x) + (5 + 9)$ – *Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp*

$= x^2 + 3x + 14$ – *Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng*

Khi đó, ta nói $x^2 + 3x + 14$ là tổng của hai đa thức P và Q.

2. TRỪ HAI ĐA THỨC

Để trừ đa thức $P = x^2 + 6x + 5$ cho đa thức $Q = -3x + 9$, ta thực hiện:

$P - Q = (x^2 + 6x + 5) - (-3x + 9)$ – *Đặt phép toán*

$= x^2 + 6x + 5 + 3x - 9$ – *Thực hiện phép bỏ dấu ngoặc*

$= x^2 + (6x + 3x) + (5 - 9)$ – *Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp*

$= x^2 + 9x - 4$ – *Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng*

Khi đó, ta nói $x^2 + 9x - 4$ là hiệu của hai đa thức P và Q.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Tính tổng của hai đa thức* P *và* Q, *biết*:

$$P = 6x^2y - 6xy^2 + xy \text{ và } Q = 7xy + 4xy^2 + y.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$P + Q = (6x^2y - 6xy^2 + xy) + (7xy + 4xy^2 + y)$

$= 6x^2y - 6xy^2 + xy + 7xy + 4xy^2 + y$

$= 6x^2y + (xy + 7xy) + (4xy^2 - 6xy^2) + y = 6x^2y + 8xy - 2xy^2 + y.$

Ví dụ 2: *Tính* P – Q, *biết*:

$$P = x^2y^3 + x^2y - 6xy^2 \text{ và } Q = -2xy^2 + 9x^2y - 8.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$P + Q = (x^2y^3 + x^2y - 6xy^2) - (-2xy^2 + 9x^2y - 8)$

$= x^2y^3 + x^2y - 6xy^2 + 2xy^2 - 9x^2y + 8$

$= x^2y^3 + (x^2y - 9x^2y) + (-6xy^2 + 2xy^2) + 8 = x^2y^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 8$

Ví dụ 3: *Cho hai đa thức*:

$$P = 8x^3 - 2x^2 + x + 2 \text{ và } Q = x^4 - x^3 + 3x.$$

a. *Tính* P + Q. b. *Tính* P – Q. c. *Tính* Q – P.

Giải

a. Ta có:

$$P + Q = (8x^3 - 2x^2 + x + 2) + (x^4 - x^3 + 3x)$$
$$= 8x^3 - 2x^2 + x + 2 + x^4 - x^3 + 3x$$
$$= (8x^3 - x^3) - 2x^2 + (x + 3x) + 2 + x^4 = 7x^3 - 2x^2 + 4x + 2 + x^4.$$

b. Ta có:

$$P - Q = 8x^3 - 2x^2 + x + 2 - x^4 + x^3 - 3x$$
$$= (8x^3 + x^3) - 2x^2 + (x - 3x) + 2 - x^4 = 9x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - x^4.$$

c. Ta có:

$$Q - P = (x^4 - x^3 + 3x) - (8x^3 - 2x^2 + x + 2)$$
$$= x^4 - x^3 + 3x - 8x^3 + 2x^2 - x - 2$$
$$= x^4 - (x^3 + 8x^3) + (3x - x) + 2x^2 - 2 = x^4 - 9x^3 + 2x + 2x^2 - 2.$$

Ví dụ 4: *Tìm đa thức A biết:*

a. $A + (x^2 - y^2) = 8x^2 + 2y^2 - 3x^2y.$

b. $A - (2xy - x^2 + 2y^2) = x^2 - 2y^2 + xy.$

Giải

a. Ta có:

$$A + (x^2 - y^2) = 8x^2 + 2y^2 - 3x^2y$$
$$\Leftrightarrow A = (8x^2 + 2y^2 - 3x^2y) - (x^2 - y^2) = 7x^2 + 3y^2 - 3x^2y.$$

Vậy, đa thức A cần tìm có dạng:

$$A = 7x^2 + 3y^2 - 3x^2y.$$

b. Ta có:

$$A - (2xy - x^2 + 2y^2) = x^2 - 2y^2 + xy$$
$$\Leftrightarrow A = (x^2 - 2y^2 + xy) + (2xy - x^2 + 2y^2) = 3xy$$

Vậy, đa thức A cần tìm có dạng:

$$A = 3xy.$$

Ví dụ 5: *Tính giá trị của các biểu thức sau:*

a. $P = xy^2 + x^2y^4 + x^3y^6 + ... + x^8y^{16}$ *tại* $x = -1$ *và* $y = 1$.

b. $Q = xy^2z + x^2y^4z^2 + x^3y^6z^3 + ... + x^8y^{16}z^8$ *tại* $x = -1$, $y = -1$ *và* $z = -1$.

Giải

a. Ta có:

$$P = xy^2 + (xy^2)^2 + (xy^2)^3 + ... + (xy^2)^8.$$

Khi $x = -1$ và $y = 1$, ta được:

$$xy^2 = -1.$$

Do đó:

$$P = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

b. Ta có:

$$Q = xy^2z + (xy^2z)^2 + (xy^2z)^3 + ... + (xy^2z)^8.$$

Khi $x = -1$, $y = -1$ và $z = -1$, ta được :

$$xy^2z = (-1) . (-1)^2 . (-1) = 1.$$

Do đó: $Q = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8.$

Ví dụ 6: *Cho hai biểu thức sau:*

$$P + Q = 2x^2 + 5y^2 - 3xy; \quad (1)$$

$$P - Q = x^2 - y^2 + 2xy. \quad (2)$$

Tìm hai đa thức P *và* Q *thoả mãn hai biểu thức trên.*

✍ *Giải*

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2P = 2x^2 + 5y^2 - 3xy + x^2 - y^2 + 2xy = 3x^2 + 4y^2 - xy.$$

$$\Rightarrow P = (3x^2 + 4y^2 - xy) : 2 = \frac{3}{2}x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}xy.$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2Q = 2x^2 + 5y^2 - 3xy - (x^2 - y^2 + 2xy)$$

$$= 2x^2 + 5y^2 - 3xy - x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + 6y^2 - 5xy$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - \frac{5}{2}xy.$$

Vậy, hai đa thức cần tìm là:

$$P = \frac{3}{2}x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}xy \text{ và } Q = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - \frac{5}{2}xy.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai đa thức:

$$P = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \text{ và } Q = 5x^2 - 3x + 2.$$

a. Tính P + Q. b. Tính P – Q. c. Tính Q – P.

Bài 2: Cho hai đa thức:

$$P = x^4 - x^3 + x^2 + 3x \text{ và } Q = 2x^4 - 9x^2 - 5.$$

a. Tính P + Q. b. Tính P – Q. c. Tính Q – P.

Bài 3: Cho hai đa thức:

$$P = 2x^2y + 9xy^2 - 7y^3 \text{ và } Q = 8x^2y + xy^2.$$

a. Tính P + Q. b. Tính P – Q. c. Tính Q – P.

Bài 4: Tìm đa thức A biết:

a. $2A + (2x^2 + y^2) = 6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2$.

b. $2A - (xy + 3x^2 - 2y^2) = x^2 - 8y^2 + xy$.

Bài 5: Cho hai biểu thức sau:

$$2P + Q = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2;$$

$$P - Q = 2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2.$$

Tìm hai đa thức P và Q thoả mãn hai biểu thức trên.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Ta có:

$$P + Q = (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5) + (5x^2 - 3x + 2)$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 + 5x^2 - 3x + 2$$

$$= 3x^3 - (3x^2 - 5x^2) + (8x - 3x) + (2 - 5)$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3.$$

b. Ta có:

$$P - Q = (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5) - (5x^2 - 3x + 2)$$
$$= 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 - 5x^2 + 3x - 2$$
$$= 3x^3 - (3x^2 + 5x^2) + (8x + 3x) - (5 + 2)$$
$$= 3x^3 - 8x^2 + 11x - 7.$$

c. Ta có:

$$Q - P = (5x^2 - 3x + 2) - (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5)$$
$$= 5x^2 - 3x + 2 - 3x^3 + 3x^2 - 8x + 5$$
$$= (5x^2 + 3x^2) - (3x + 8x) - 3x^3 + (5 + 2) = 8x^2 - 11x - 3x^3 + 7.$$

Bài 2:

a. $P + Q = 3x^4 - x^3 - 8x^2 + 3x - 5.$

b. $P - Q = -x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + 5.$

c. $Q - P = x^4 + x^3 - 10x^2 - 3x - 5.$

Bài 3:

a. $P + Q = 10x^2y + 10xy^2 - 7y^3.$

b. $P - Q = -6x^2y + 8xy^2 - 7y^3.$

c. $Q - P = 6x^2y - 8xy^2 + 7y^3.$

Bài 4:

a. Ta có:

$$2A + (2x^2 + y^2) = 6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 2A = (6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2) - (2x^2 + y^2) = 4x^2 - 6y^2 - 2x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow A = 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2.$$

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2$.

b. Ta có:

$$2A - (xy + 3x^2 - 2y^2) = x^2 - 8y^2 + xy$$
$$\Leftrightarrow 2A = (x^2 - 8y^2 + xy) + (xy + 3x^2 - 2y^2) = 4x^2 - 10y^2 + 2xy$$
$$\Leftrightarrow A = 2x^2 - 5y^2 + xy.$$

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 2x^2 - 5y^2 + xy$.

Bài 5: Ký hiệu các đa thức theo thứ tự là (1), (2).

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$3P = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 + 2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2 = 3x^2y + 5xy^2 + 6x^2y^2.$$
$$\Rightarrow P = (3x^2y + 5xy^2 + 6x^2y^2) : 3 = x^2y + \frac{5}{3}xy^2 + 2x^2y^2.$$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2(P - Q) = 2(2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2)$$
$$\Leftrightarrow 2P - 2Q = 4x^2y - 2xy^2 + 6x^2y^2 \qquad (3)$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (3), ta được:

$$3Q = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 - (4x^2y - 2xy^2 + 6x^2y^2)$$
$$= x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 - 4x^2y + 2xy^2 - 6x^2y^2)$$
$$= -3x^2y + 8xy^2 - 3x^2y^2$$
$$\Rightarrow Q = -x^2y + \frac{8}{3}xy^2 - x^2y^2.$$

CHỦ ĐỀ 7

ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐA THỨC MỘT BIẾN

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Để chỉ rõ:

- A là đa thức của biến x người ta viết A(x).
- B là đa thức của biến y người ta viết B(y).

Khi đó, giá trị của đa thức A(x) tại x = 8 được kí hiệu là A(8),...

☛ ***Chú ý***: Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

2. SẮP XẾP MỘT ĐA THỨC

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến, người ta sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến..

3. HỆ SỐ

Xét đa thức: $P(x) = 2x^3 + cx - 3$ đó là một đa thức đã thu gọn, trong đó:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- c là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- −3 là hệ số của lũy thừa bậc 0 (còn gọi là *hệ số tự do*).

Ngoài ra, vì P(x) có bậc bằng 3 nên hệ số của lũy thừa bậc 3 còn gọi là *hệ số cao nhất*.

☛ ***Chú ý***: Có thể viết đa thức P(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0 như sau: $P(x) = 2x^3 + 0.x^2 + cx - 3$.

Do đó, ta nói hệ số của lũy thừa bậc 2 của P(x) bằng 0.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho đa thức*: $P(x) = x^2 - 8x + 19$.

a. *Tìm bậc của đa thức* A(x).

b. *Tính* A(4), A(−1).

✍ *Giải*

a. Đa thức A(x) có bậc 2.

b. Ta có: $A(4) = 4^2 - 8.4 + 19 = 3$.

c. Ta có: $A(-1) = (-1)^2 - 8.(-1) + 19 = 28$.

Ví dụ 2: *Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trường hợp sau*:

a. *Có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là −5.*

b. *Có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là −2.*

✍ *Giải*

a. Đa thức một biến có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là -5. Chẳng hạn: $x^8 - 5$; $3x^8 - 5$; ...

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là: $m.x^8 - 5$, với $m \neq 0$.

b. Đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là -2. Chẳng hạn: $7x^2 + 5x - 2$; $7x^5 + 8x^2 - 2$; ...

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là:

$$7x^m + ax^n - 2, \text{ với } m > n \geq 1, a \neq 0 \text{ và } a < 7.$$

Ví dụ 3: *Hãy sắp xếp các hạng tử của đa thức sau:* $P(x) = 7 + x^3 + 9x - 27x^2$.

✍ *Giải*

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $P(x) = 7 + 9x - 27x^2 + x^3$.
- Lũy thừa giảm, ta được: $P(x) = x^3 - 27x^2 + 9x + 7$.

☞ ***Chú ý***: Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

Ví dụ 4: *Hãy sắp xếp các hạng tử của đa thức sau:*

$$Q(x) = 2 - 3x^2 + x^4 - 6x^3 + 9x + 3x^3 - x - 7.$$

✍ *Giải*

Thu gọn đa thức bằng cách:

$$Q(x) = (2 - 7) - 3x^2 + x^4 - (6x^3 - 3x^3) + (9x - x) = -5 - 3x^2 + x^4 - 3x^3 + 8x.$$

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5$.
- Lũy thừa giảm, ta được: $Q(x) = -5 + 8x - 3x^2 - 3x^3 + x^4$.

☞ ***Nhận xét***: Mọi đa thức bậc hai của biến x, sau khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa giảm của biến, đều có dạng: $ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.
Như vậy, ta có một biểu thức đại số trong đó x là biến còn a, b, c đại diện cho các số xác định cho trước. Để phân biệt với biến, người ta gọi những chữ như vậy là *hằng số* (gọi tắt là *hằng*).

Ví dụ 5: *Cho đa thức:*

$$Q(x) = 2x^5 - 3x^2 - 3 + x^4 - 2 + 6x^3 + 8x - 6x^3 + 5 - 2x^5.$$

a. *Sắp xếp các hạng tử của* $Q(x)$ *theo lũy thừa giảm của biến.*

b. *Viết đa thức* $Q(x)$ *đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc* 0.

c. *Chỉ ra các hệ số của* $Q(x)$.

d. *Tính* $Q(-2)$, $Q(1)$.

✍ *Giải*

a. Thu gọn $Q(x)$, ta được:

$$Q(x) = (2x^5 - 2x^5) - 3x^2 - (3 + 2 - 5) + x^4 + (6x^3 - 6x^3) + 8x$$
$$= -3x^2 + x^4 + 8x.$$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$Q(x) = x^4 - 3x^2 + 8x.$$

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là: $Q(x) = x^4 - 0.x^3 - 3x^2 + 8x + 0$.

c. Như vậy, Q(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- –3 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có: $Q(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^2 + 8(-2) = 16 - 12 - 16 = -12$.

$Q(1) = 1^4 - 3.1^2 + 8.1 = 1 - 3 + 8 = 6$.

Ví dụ 6: *Cho đa thức:* $Q(x) = x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 9 - 5x^3 + x^3 + 11$.

a. *Sắp xếp các hạng tử của* Q(x) *theo lũy thừa giảm của biến.*

b. *Viết đa thức* Q(x) *đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc* 0.

c. *Chỉ ra các hệ số của* Q(x).

d. *Tính* Q(–3), Q(2).

Giải

a. Thu gọn Q(x), ta được:

$$Q(x) = (1 - 5 + 1)x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 11 + 9 = -3x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 20.$$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 20.$$

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là: $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 0.x + 20$.

c. Như vậy, Q(x) có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- –3 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- –6 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 20 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có:

$$Q(-3) = 2(-3)^4 - 3(-3)^3 - 6(-3)^2 + 20 = 209.$$

$$Q(2) = 2.2^4 - 3.2^3 - 6.2^2 + 20 = 4.$$

Ví dụ 7: *Tính giá trị của đa thức sau:*

a. $x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{50}$ *tại* $x = -1$.

b. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại $x = 1$ (a, b, c, d *là hằng số*).

Giải

a. Thay $x = -1$ vào $x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{50}$. Ta được:

$$(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + ... + (-1)^{50} = -1 + 1 - 1 + ... + 1 = 0.$$

b. Thay $x = 1$ vào $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ta được:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = a + b + c + d$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trường hợp sau:

a. Có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9.

b. Có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6.

Bài 2: Cho đa thức: $P(x) = 4x^2 + x^4 - x^2 + 50 + 2x^3 + 6x - 2x^3 + 2x + 4$.

a. Sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức P(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của P(x).

d. Tính P(–2), P(1).

Bài 3: Cho đa thức: $Q(x) = 8 + 3x - x^2 + 9x^3 - 3x - x^2 - x^3 - 6$.

a. Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức Q(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của Q(x).

d. Tính Q(–4), Q(3).

Bài 4: Cho đa thức: $R = -4xy + x^2 + 2y^2$.

a. Sắp xếp các hạng tử của R(x) theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của R(x). Tính R(–3).

b. Sắp xếp các hạng tử của R(y) theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của R(y). Tính R(2).

Bài 5: Cho đa thức: $P = ax^2 + 5x^4 - 8x + 9 - x^2 + ax$ (a là hằng số).

a. Thu gọn rồi sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Chỉ ra các hệ số của P(x).

c. Tính P(–2).

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Đa thức một biến có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9. Chẳng hạn:

$x^5 + x^2 + 9$; $2x^5 + 3x^4 + 9$; ...

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là: $ax^5 + bx^n + 9$, với a, b, n $\neq 0$ và $n \geq 1$.

b. Đa thức một biến có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6. Chẳng hạn: $11x^8 + 3x^2 - 9x + 6$; $11x^3 - x^2 + 10x + 6$; ...

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là:

$11x^m + ax^n + bx^p + 6$, với $m > n > p \geq 1$, a, b $\neq 0$ và a, b <11.

Bài 2:

a. Thu gọn P(x), ta được:

$P(x) = (4 - 1)x^2 + x^4 + (50 + 4) + (2 - 2)x^3 + (6 + 2)x = 3x^2 + x^4 + 54 + 8x$.

Khi đó, P(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$P(x) = x^4 + 3x^2 + 8x + 54$.

b. Dạng đầy đủ của P(x) là: $P(x) = x^4 + 0.x^3 + 3x^2 + 8x + 54$.

c. Như vậy, P(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- 3 là hệ số của lũy thừa bậc 2,

- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 54 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có:

$P(-2) = (-2)^4 + 3.(-2)^2 + 8.(-2) + 54 = 66.$

$P(1) = 1^4 + 3.1^2 + 8.1 + 54 = 66.$

Bài 3:

a. Thu gọn Q(x), ta được:

$Q(x) = (8 - 6) + (3 - 3)x - (1 + 1)x^2 + (9 - 1)x^3 = 2 - 2x^2 + 8x^3.$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là $Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 2$.

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là $Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 0.x + 2$.

c. Như vậy, Q(x) có:

- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- –2 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có:

$Q(-4) = 8.(-4)^3 - 2.\ (-4)^2 + 2 = -542.$

$Q(3) = 8.3^3 - 2.3^2 + 2 = 200.$

Bài 4:

a. R(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(x) = x^2 - 4xy + 2y^2$.

Như vậy, R(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- –4y là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- $2y^2$ là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay: $R(-3) = (-3)^2 - 4.(-3).y + 2y^2 = 9 + 12y + 2y^2$.

b. R(y) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(y) = 2y^2 - 4xy + x^2$

Như vậy, R(y) có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- –4x là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- x^2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay: $R(2) = 2.2^2 - 4x.2 + x^2 = 8 - 8x + x^2$.

Bài 5:

a. Thu gọn P(x), ta được:

$P(x) = ax^2 - x^2 + 5x^4 - 8x + ax + 9\ = (a-1)x^2 + 5x^4\ + (a - 8)x + 9$

Khi đó, P(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$P(x) = 5x^4\ + (a-1)x^2 + (a - 8)x + 9.$

b. Như vậy, P(x) có:

- 5 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- a – 1 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- a – 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 9 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

c. Ta có:

$P(-2) = 5(-2)^4\ + (a-1)(-2)^2 + (a - 8)(-2) + 9$

$= 5.16 + (a-1).4 - (a - 8).2 + 9 = 101 + 2a.$

CHỦ ĐỀ 8 CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CỘNG HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

Thí dụ minh hoạ : Để cộng hai đa thức:

$$P(x) = x^2 + 12x - 16 \text{ và } Q(x) = x + 2x^2$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1 Ta có:

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + 12x - 16) + (x + 2x^2) = (x^2 + 2x^2) + (12x + x) - 16$$
$$= 3x^2 + 13x - 16.$$

Cách 2 Ta đặt và thực hiện phép cộng, như sau:

$$\begin{array}{rl} + \quad P(x) = & x^2 + 12x - 16 \\ Q(x) = & 2x^2 + x \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^2 + 13x - 16 \end{array}$$

→ *Đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột*

→ *Viết P(x) theo lũy thừa giảm dần*

→ *Viết Q(x) theo lũy thừa giảm dần*

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép cộng theo cột dọc.

2. TRỪ HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

Thí dụ minh hoạ : Để tính P(x) – Q(x), biết:

$$P(x) = x^2 + 12x - 16 \text{ và } Q(x) = x + 2x^2$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1 Ta có:

$$P(x) - Q(x) = (x^2 + 12x - 16) - (x + 2x^2) = x^2 + 12x - 16 - x - 2x^2$$
$$= (x^2 - 2x^2) + (12x - x) - 16 = -x^2 + 11x - 16.$$

Cách 2 Ta đặt và thực hiện phép trừ, như sau:

$$\begin{array}{rl} - \quad P(x) = & x^2 + 12x - 16 \\ Q(x) = & 2x^2 + x \\ \hline P(x) - Q(x) = & -x^2 + 11x - 16 \end{array}$$

→ *Đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột*

→ *Viết P(x) theo lũy thừa giảm dần*

→ *Viết Q(x) theo lũy thừa giảm dần*

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép trừ theo cột dọc.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho hai đa thức:*

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \text{ và } Q(x) = x^3 + x - 1.$$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

Giải

Để tính $P(x) + Q(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} + & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ \hline & P(x) + Q(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 1 \end{array}$$

Để tính $P(x) - Q(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} - & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ \hline & P(x) - Q(x) = \quad -5x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Để tính $Q(x) - P(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} - & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ \hline & Q(x) - P(x) = \quad 5x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Ví dụ 2: *Cho hai đa thức:*

$$f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x + 8; \qquad g(x) = x^4 - x^2 + 3x + 9.$$

Tìm đa thức $h(x)$ *sao cho:*

a. $f(x) - h(x) = g(x)$.

b. $h(x) - g(x) = f(x)$.

Giải

a. Ta có:

$f(x) - h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) - (x^4 - x^2 + 3x + 9)$

$= 2x^4 + 5x^3 - x + 8 - x^4 + x^2 - 3x - 9 = x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1.$

Vậy, đa thức cần tìm:

$h(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1.$

b. Ta có:

$h(x) - g(x) = f(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) + (x^4 - x^2 + 3x + 9)$

$= 2x^4 + 5x^3 - x + 8 + x^4 - x^2 + 3x + 9 = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17.$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17$.

Ví dụ 3: *Cho hai biểu thức sau:*

$$f(x) + g(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x; \qquad (1)$$

$$f(x) - g(x) = x^4 - x^2 + 2x. \qquad (2)$$

Tìm hai đa thức $f(x)$ *và* $g(x)$ *thoả mãn hai biểu thức trên.*

✍ *Giải*

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2f(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x + x^4 - x^2 + 2x = 3x^4 + 4x^2 - x.$$

$$\Rightarrow f(x) = (3x^4 + 4x^2 - x) : 2 = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2g(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x - (x^4 - x^2 + 2x)$$

$$= 2x^4 + 5x^2 - 3x - x^4 + x^2 - 2x = x^4 + 6x^2 - 5x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.$$

Vậy, hai đa thức cần tìm là:

$$F(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x \text{ và } g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai đa thức:

$$P(x) = 5x^3 - 13x + 10 \text{ và } Q(x) = x^2 + 6x - 1.$$

Hãy tính P(x) + Q(x), P(x) − Q(x), Q(x) − P(x).

Bài 2: Cho hai đa thức:

$$P(x) = 8x^3 - x + 2 \text{ và } Q(x) = x^2 + 6x - 3.$$

Hãy tính P(x) + Q(x), P(x) − Q(x), Q(x) − P(x).

Bài 3: Cho hai đa thức:

$$f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7;$$

$$g(x) = 2x^4 + 3x^2 - x - 5.$$

Tìm đa thức h(x) sao cho:

a. f(x) − h(x) = g(x).

b. h(x) − g(x) = f(x).

Bài 4: Cho hai biểu thức sau:

$$2f(x) + g(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^4; \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x^4. \quad (2)$$

Tìm hai đa thức f(x) và g(x) thoả mãn hai biểu thức trên.

Bài 5: Cho hai đa thức sau:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n;$$

a. Tính f(x) + g(x).

b. Tính f(x) − g(x).

Bài 6: Tính f(x)−g(x) + h(x) biết:

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x + 3; \; g(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 1; \; h(x) = 2x^4 - 1.$$

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta được:

$P(x) + Q(x) = 5x^3 + x^2 - 7x + 9.$

$P(x) - Q(x) = 5x^3 - x^2 - 19x + 11.$

$Q(x) - P(x) = -5x^3 + x^2 + 19x - 11.$

Bài 2: Ta được:

$P(x) + Q(x) = 8x^3 + x^2 + 5x - 1.$

$P(x) - Q(x) = 8x^3 - x^2 - 7x + 5.$

$Q(x) - P(x) = -8x^3 + x^2 + 7x - 5.$

Bài 3:

a. Ta có: $f(x) - h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) - (2x^4 + 3x^2 - x - 5)$

$= 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 - 2x^4 - 3x^2 + x + 5 = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12.$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12.$

b. Ta có: $h(x) - g(x) = f(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) + (2x^4 + 3x^2 - x - 5)$

$= 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 + 2x^4 + 3x^2 - x - 5$

$= 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2.$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2.$

Bài 4: Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$3f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^3 + 2x^3 - x^2 + 3x^4 = 3x^3 + 5x^2 + 6x^4.$

$\Rightarrow P = (3x^3 + 5x^2 + 6x^4) : 3 = x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x^4.$

Ta có:

$(2) \Leftrightarrow 2(f(x) - g(x)) = 2(2x^3 - x^2 + 3x^4)$

$\Leftrightarrow 2f(x) - 2g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x^4 \qquad (3)$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (3), ta được:

$3g(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^4 - (4x^3 - 2x^2 + 6x^4) = -3x^3 + 8x^2 - 3x^4.$

$\Rightarrow Q = -x^3 + \frac{8}{3}x^2 - x^4.$

Bài 5:

a. Để tính f(x) + g(x) ta đặt:

$$\begin{array}{rl} + & f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\ & g(x = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \\ \hline & f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + a_n + b_n \end{array}$$

b. Để tính f(x) + g(x) ta đặt:

$$\begin{array}{rl} - & f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\ & g(x = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \\ \hline & f(x) - g(x) = (a_0 - b_0)x + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n \end{array}$$

Bài 6: Ta được:

$f(x) - g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

$f(x) - g(x) + h(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

CHỦ ĐỀ 9

NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

☞ ***Chú ý***:

2. Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm,... hoặc không có nghiệm (gọi là *vô nghiệm*).
3. Người ta chứng minh được rằng " ***Một đa thức (khác đa thức 0) có số nghiệm không vượt quá bậc của nó*** ". Chẳng hạn, đa thức bậc nhất chỉ có nhiều nhất 1 nghiệm, đa thức bậc hai có không quá hai nghiệm, ...

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho đa thức*: $Q(x) = x^3 - 9x$.

Kiểm nghiệm rằng đa thức $Q(x)$ *có ba nghiệm* $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

✍ *Giải*

Ta có: $Q(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

$Q(0) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

$Q(3) = 3^3 - 9.3 = 27 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Ví dụ 2: *Chứng tỏ rằng đa thức* $R(y) = y^2 + 2$ *vô nghiệm*:

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

$$R(y) = y^2 + 2 \geq 0 + 2 > 0 \Rightarrow R(y) \text{ vô nghiệm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Với yêu cầu " *Tìm nghiệm của đa thức Q* ", chúng ta cần đi thực hiện $Q = 0$.

Ví dụ 3: *Tìm nghiệm của đa thức* $P(x) = 2x + 3$.

✍ *Giải*

Nghiệm của đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Vậy, $x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Ví dụ 4: *Chứng tỏ rằng nếu* a + b + c = 0 *thì* x = 1 *là nghiệm của đa thức* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ngoài ra nếu $a \neq 0$ *thì* $x = \frac{c}{a}$ *cũng là nghiệm của đa thức* f(x).

✍ *Giải*

Ta có: $f(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + c = 0 \Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm của đa thức f(x)

Với $a \neq 0$, ta có:

$$f\left(\frac{c}{a}\right) = a.\left(\frac{c}{a}\right)^2 + b.\frac{c}{a} + c = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + c = \frac{c}{a}(c + b + a) = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức f(x).

☞ ***Nhận xét***: Áp dụng kết quả trên, ta có thể tìm được nghiệm của các đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a + b + c = 0. Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Ví dụ 5: *Tìm các nghiệm của đa thức* $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

✍ *Giải*

Ta có 3–7 + 4 = 0, do đó đa thức f(x) có các nghiệm x = 1 $x = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 6: *Tìm mối liên hệ của* a, b, c, d *để* x = 1 *là nghiệm của đa thức*:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

✍ *Giải*

Để x = 1 là nghiệm của đa thức f(x) điều kiện là:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0.$$

Vậy, với a + b + c + d = 0 thì f(x) nhận x = 1 làm nghiệm.

Ví dụ 7: *Chứng tỏ rằng đa thức* $x^2 + 2x + 3$ *không có nghiệm.*

✍ *Giải*

Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 0 + 2 > 2$.

Dó đó, đa thức $x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho đa thức: $Q(x) = x^2 - 8x + 7$.

Kiểm nghiệm rằng đa thức Q(x) có ba nghiệm x = 1, x = 7.

Bài 2: Tìm nghiệm của các đa thức:

a. x + 8. b. 3x – 7.

Bài 3: Tìm nghiệm của các đa thức:

a. (x – 2)(2x + 8). b. (3x – 9)(2x + 5).

Bài 4: Tìm nghiệm của các đa thức:

a. $(x - 3)(x^2 + 1)$.

b. $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

Bài 5: Chứng tỏ rằng nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là nghiệm của đa thức:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ngoài ra nếu $a \neq 0$ thì $x = -\dfrac{c}{a}$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Bài 6: Tìm các nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

b. $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Bài 7: Tìm các nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

b. $g(x) = 6x^2 - 5x - 11$.

Bài 8: Tìm một nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 5$.

b. $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Bài 9: Tìm mối liên hệ của a, b, c, d để $x = -1$ là nghiệm của đa thức:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Bài 10: Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a. $x^2 + 1$.

b. $x^2 - 4x + 5$.

c. $x^2 + x + 1$.

d. $x^2 - x + 1$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có:

$Q(1) = 1^2 - 8.1 + 7 = 1 - 8 + 7 = 0 \Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

$Q(7) = 7^2 - 8.7 + 7 = 49 - 56 + 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Bài 2:

a. Nghiệm của đa thức $x + 8$ thỏa mãn: $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$.

Vậy, $x = -8$ là nghiệm của đa thức $x + 8$.

b. Nghiệm của đa thức $3x - 7$ thỏa mãn:

$$3x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Vậy, $x = \dfrac{7}{3}$ là nghiệm của đa thức $3x - 7$.

Bài 3:

a. Nghiệm của đa thức $(x - 2)(2x + 8)$ thỏa mãn:

$(x - 2)(2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ hoặc $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$.

Vậy, $x = 2$ hoặc $x = -4$ là nghiệm của đa thức $(x - 2)(2x + 8)$.

b. Nghiệm của đa thức $(3x - 9)(2x + 5)$ thỏa mãn:

$(3x - 9)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$ hoặc $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy, $x = 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$ là nghiệm của đa thức $(3x - 9)(2x + 5)$.

Bài 4:

a. Nghiệm của đa thức $(x-3)(x^2+1)$ thỏa mãn:

$(x-3)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ hoặc $x^2+1=0$ (vô nghiệm) $\Leftrightarrow x=3$.

Vậy, $x=3$ là nghiệm của đa thức $(x-3)(x^2+1)$.

b. Nghiệm của đa thức $(x^2+2)(x^2-3)$ thỏa mãn:

$(x^2+2)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x^2+2=0$ (vô nghiệm) hoặc $x^2-3=0$

$\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Vậy, $x=\pm\sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $(x^2+2)(x^2-3)$.

Bài 5: Ta có:

$f(-1)=a.(-1)^2+b.(-1)+c=a-b+c=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ là nghiệm của đa thức f(x).

Với $a \neq 0$, ta có:

$$f(-\frac{c}{a})=a.\left(-\frac{c}{a}\right)^2+b.\left(-\frac{c}{a}\right)+c=\frac{c^2}{a}-\frac{bc}{a}+c=\frac{c}{a}(c-b+a)=0$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức f(x).

Bài 6:

a. $x=1, x=3$.

b. $x=1, x=\frac{3}{2}$.

Bài 7:

a. $x=-1, x=-3$.

b. $x=-1, x=\frac{11}{6}$.

Bài 8:

a. $x=1$.

b. $x=1$.

Bài 10:

a. Ta có: $x^2+1 \geq 0+1>1$.

Dó đó, đa thức x^2+1 không có nghiệm.

b. Ta có: $x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \geq 0+1>1$.

Dó đó, đa thức x^2-4x+5 không có nghiệm.

c. Ta có: $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq 0+\frac{3}{4}>\frac{3}{4}$.

Dó đó, đa thức x^2+x+1 không có nghiệm.

d. Ta có: $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq 0+\frac{3}{4}>\frac{3}{4}$.

Dó đó, đa thức x^2-x+1 không có nghiệm.

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG I – ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

CHỦ ĐỀ 1 HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

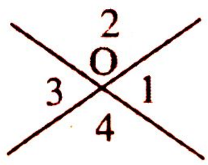
1. THẾ NÀO LÀ HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH?

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

2. TÍNH CHẤT CỦA HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

Chứng minh



Nhận xét rằng:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0$, vì là hai góc kề bù.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = 180^0$, vì là hai góc kề bù.

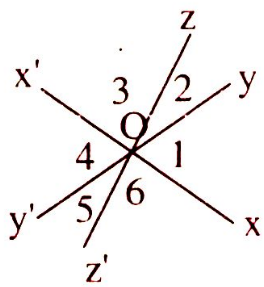
Suy ra: $\hat{O}_2 = \hat{O}_4$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 7/tr 83 – Sgk): *Cho ba đường thẳng* xx', yy', zz' *đồng quy tại* O. *Hãy viết tên các cặp góc đối đỉnh.*

Giải



Từ hình vẽ ta nhận thấy ngay các cặp góc đối đỉnh bằng nhau , bao gồm:

$\hat{O}_1$ và $\hat{O}_4$, $\hat{O}_2$ và $\hat{O}_5$, $\hat{O}_3$ và $\hat{O}_6$.

$\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$,

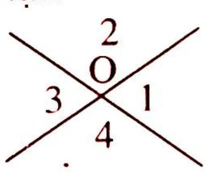
$\widehat{yOx'}$ và $\widehat{y'Ox}$,

$\widehat{zOy'}$ và $\widehat{z'Oy}$.

Vậy, theo giả thiết ta nhận được 6 cặp góc đối đỉnh.

Ví dụ 2: (Bài 6/tr 83 – Sgk): *Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc* 47^0. *Tính số đo các góc còn lại.*

Giải



Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\hat{O}_1 = 47^0$. Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 47^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow \hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 - 47^0 = 133^0$.

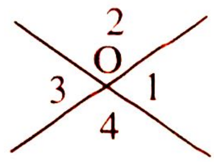
Ví dụ 3: *Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một cặp góc đối đỉnh có tổng số đo bằng 130^0. Tính số đo của mỗi góc.*

✍ *Giải*

Theo giả thiết, ta có thể giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và

$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 130^0$.

Khi đó:



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \frac{130^0}{2} = 65^0.$$

$$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 180^0 - 65^0 = 115^0.$$

☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ 2 và ví dụ 3, chúng ta có thể khẳng định được rằng:

Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 góc, ta có thể tính được số đo của các góc nếu biết:

a. Số đo của 1 trong 4 góc đó.

b. Tổng số đo của một cặp góc đối đỉnh.

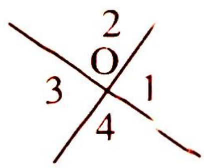
c. Tổng số đo của 3 trong 4 góc đó.

d. Hiệu số đo của hai góc kề bù.

e. Tỉ số số đo của hai góc kề bù.

Ví dụ 4: *Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 90^0. Chứng tỏ rằng số đo các góc còn lại đều bằng nhau.*

✍ *Giải*



Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\hat{O}_1 = 90^0$.

Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 90^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow \hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Vậy, ta được $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, nếu hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông thì các góc còn lại cũng vuông – *Trường hợp này chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn trong chủ đề hai đường thẳng vuông góc.*

Ví dụ 5: *Hãy thực hiện các công việc sau:*

a. *Vẽ góc* $\widehat{xOy} = 60^0$.

b. *Vẽ góc* $\widehat{x'Oy'}$ *đối đỉnh với góc* $\widehat{xOy}$.

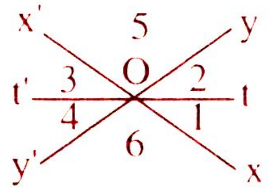
c. *Vẽ tia phân giác* Ot *của góc* $\widehat{xOy}$.

d. Vẽ tia đối Ot' của tia Ot. Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.

e. Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

✍ *Giải*

Công việc của các yêu cầu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.



a. Từ hình vẽ ta thấy:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, vì đối đỉnh.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$, vì đối đỉnh.

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Leftrightarrow$ Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.

b. Năm cặp góc đối đỉnh, gồm có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 30^0$, $\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 30^0$, $\hat{O}_5 = \hat{O}_6 = 180^0 - 60^0 = 120^0$,

$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 60^0$,

$\widehat{tOx'} = t'\hat{O}x = 30^0 + 120^0 = 150^0$, $y\hat{O}t' = y'\hat{O}t = 30^0 + 120^0 = 150^0$.

☞ ***Nhận xét***: Trong ví trên chúng ta đã chứng minh được kết quả:

"*Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau*"

Kết quả này thường sử dụng để:

- Chứng minh hai tia đối nhau.
- Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

a. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.

b. Viết tên các góc bằng nhau.

Bài 2: Vẽ bốn đường thẳng cắt nhau tại O rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

a. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.

b. Viết tên các góc bằng nhau.

Bài 3: Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì chúng tạo thành bao nhiêu cặp góc đối đỉnh.

Bài 4: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 80^0. Tính số đo các góc còn lại.

Bài 5: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 68^0. Tính số đo các góc còn lại.

Bài 6: Hãy thực hiện các công việc sau:

a. Vẽ góc $\widehat{xOy} = 80^0$.

b. Vẽ góc $\widehat{x'Oy'}$ đối đỉnh với góc $\widehat{xOy}$.

c. Vẽ tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOy}$.

d. Vẽ tia đối Ot' của tia Ot. Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.

e. Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

Bài 7: Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 góc (như trong hình vẽ). Tính số đo của các góc còn lại nếu biết:

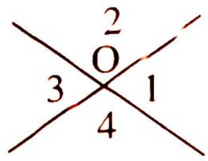
a. $\hat{O}_1 = 75^0$.

b. $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 140^0$.

c. $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 240^0$.

d. $\hat{O}_2 - \hat{O}_1 = 30^0$.

e. $\hat{O}_2 = 2\hat{O}_1$.



Bài 8: Cho hai góc đối đỉnh. Vẽ một tia phân giác của một trong hai góc đó. Chứng minh rằng tia đối của tia này là tia phân giác của góc còn lại.

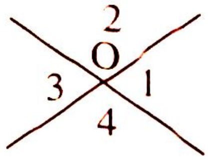
D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 3: n(n – 1).

Bài 4: Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\hat{O}_1 = 80^0$. Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 80^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

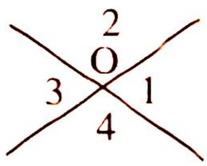
$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow \hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 - 80^0 = 100^0$.



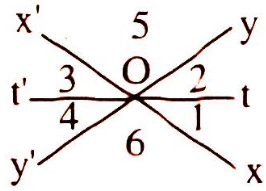
Bài 5:Với hình vẽ bên, ta nhận được:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 68^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 112^0$.



Bài 6: Công việc của các yêu cầu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.



a. Từ hình vẽ ta thấy:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, vì đối đỉnh.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$, vì đối đỉnh.

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Leftrightarrow$ Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.

b. Năm cặp góc đối đỉnh, gồm có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 40^0$, $\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 40^0$, $\hat{O}_5 = \hat{O}_6 = 180^0 - 80^0 = 100^0$,

$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 80^0$, $\widehat{tOx'} = \widehat{t'Ox} = 40^0 + 100^0 = 140^0$,

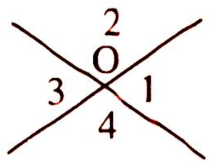
$\widehat{yOt'} = \widehat{y'Ot} = 40^0 + 100^0 = 140^0$.

Bài 7:

a. Ta có: $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 75^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow \hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 - 75^0 = 105^0$.

b. Ta có: $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \dfrac{140^0}{2} = 70^0$; $\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 180^0 - 70^0 = 110^0$.



c. Ta có: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 360^0$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 360^0 - (\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 360^0 - 240^0 = 120^0$.

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

d. Ta có: $\hat{O}_2 - \hat{O}_1 = 30^0 \Rightarrow \hat{O}_2 = 30^0 + \hat{O}_1$.

Mặt khác, ta cũng có:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 + 30^0 + \hat{O}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 75^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 30^0 + \hat{O}_1 = 105^0$.

e. Ta có:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 + 2\hat{O}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 60^0$.

$\hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 2\hat{O}_1 = 120^0$.

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. THẾ NÀO LÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ?

Hai đường thẳng a, b cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là ***hai đường thẳng vuông góc*** và được kí hiệu là a ⊥ b.

☞ *Chú ý*: Hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau (và cắt nhau tại O) còn được gọi là:

" *Đường thẳng* a *vuông góc với đường thẳng* b *(tại* O*)* "

hoặc " *Đường thẳng* b *vuông góc với đường thẳng* a (*tại* O) "

hoặc " *Hai đường thẳng* a *và* b *vuông góc với nhau* (*tại* O) ".

2. VẼ HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Qua một điểm chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Bây giờ chúng ta thực hiện bài toán sau:

Bài toán: Cho một điểm O và một đường thẳng a. Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và vuông góc với đường thẳng a.

Cách thực hiện

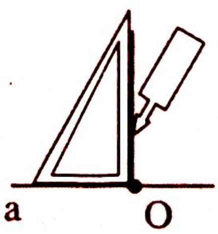
Ta xét hai trường hợp về vị trí của điểm O so với đường thẳng a.

Trường hợp 1: Nếu điểm O nằm trên đường thẳng a.

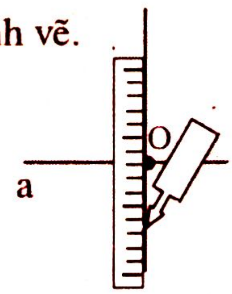
Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.



Hình ban đầu



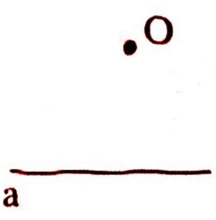
- Đặt êke với đỉnh góc vuông trùng với O và một cạnh góc vuông trùng với đường thẳng a.
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh góc vuông còn lại.

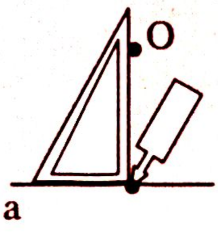


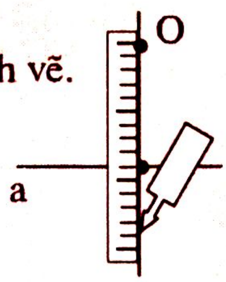
Đặt thước trùng với tia vừa vẽ rồi dùng bút kéo dài tai.

Trường hợp 2: Nếu điểm O nằm ngoài đường thẳng a.

Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.







3. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

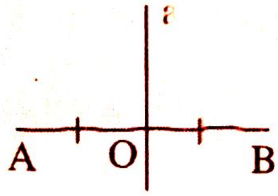
Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là **đường trung trực** của đoạn thẳng ấy.

☞ ***Chú ý***: Khi a là đường trung trực của đoạn thẳng AB ta cũng nói " *Hai điểm* A *và* B *đối xứng với nhau qua đường thẳng* a ".

Như vậy, để *dựng được đường trung trực của đoạn thẳng AB* cho trước, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm O là trung điểm của AB.

Bước 2: Dựng đường thẳng qua O vuông góc với AB. Đường thẳng này chính là đường trung trực cần dựng.

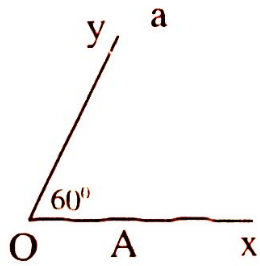


B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Vẽ hình theo cách diễn đạt " Vẽ góc $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 60^0. Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy. Gọi C là giao điểm của a và b ".*

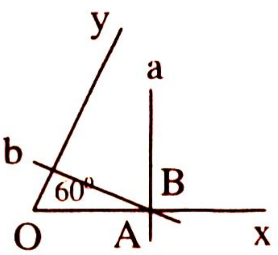
✍ *Giải*

Thực hiện:

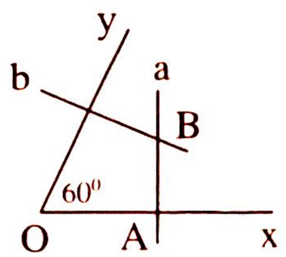


- Vẽ góc $\widehat{xOy} = 60^0$, sau đó lấy điểm A trên tia Ox.
- Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1, ta dựng được đường thẳng a đi qua A và vuông góc với Ox.
- Lấy điểm B trên đường thẳng a, khi đó ta có thể có các trường hợp sau:

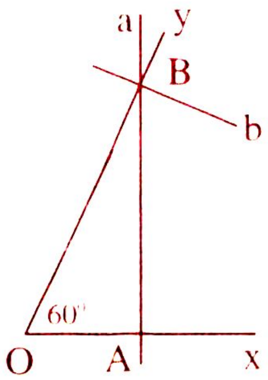
Trường hợp 1: Lấy điểm B trùng với điểm A, ta được hình vẽ:



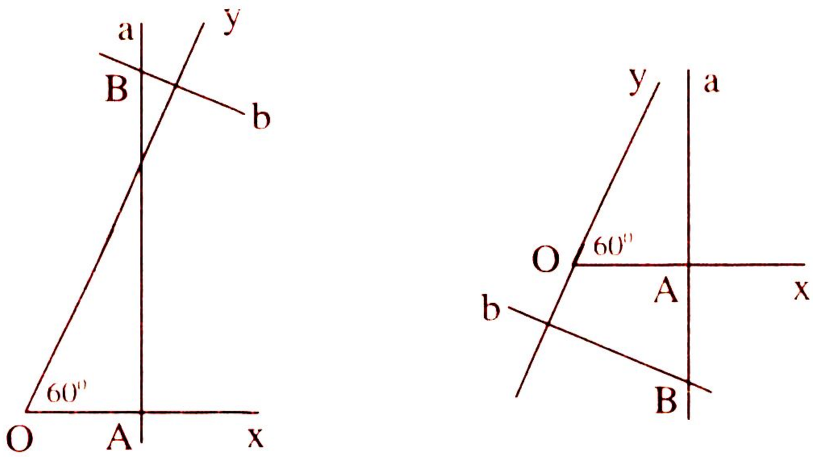
Trường hợp 2: Lấy điểm B nằm trong góc $\widehat{xOy}$, ta được hình vẽ:



Trường hợp 3: Lấy điểm B là giao điểm của a với Oy, ta được hình vẽ:



Trường hợp 4: Lấy điểm B nằm ngoài góc $\widehat{xOy}$ (có hai khả năng), ta được hình vẽ:



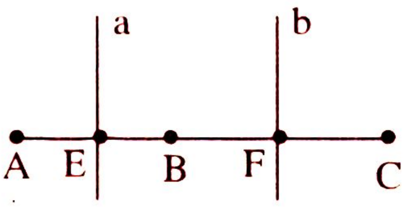
Ví dụ 2: *Vẽ hình theo cách diễn đạt " Vẽ đoạn thẳng AB = 4cm và đoạn thẳng BC = 6cm rồi vẽ đường trung trực của mỗi đoạn AB và BC ".*

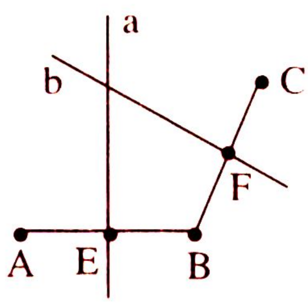
✍ *Giải*

Thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 4cm. Lấy điểm E là trung điểm của AB (E nằm giữa A, B và EA = 2cm).
- Vẽ đoạn thẳng BC = 6cm. Lấy điểm F là trung điểm của AB (F nằm giữa B, C và FB = 3cm).
- Dựng đường thẳng a qua E vuông góc với AB (*Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1*).
- Dựng đường thẳng b qua F vuông góc với BC (*Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1*).

Với các bước làm như trên chúng ta có được hình cần vẽ, tuy nhiên ở đây chúng ta nhận được hai hình bởi A, B, C có thể thẳng hàng hoặc không thẳng hàng.





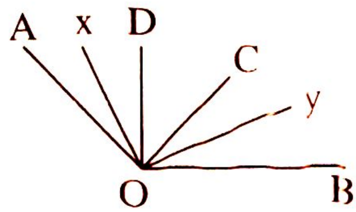
Ví dụ 3: *Cho góc tù* $\widehat{AOB}$. *Trong góc* $\widehat{AOB}$ *vẽ các tia* $OC \perp OA$ *và* $OD \perp OB$.

a. *Chứng minh rằng* $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$.

b. *Chứng minh rằng* $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$.

c. *Gọi* Ox, Oy *theo thứ tự là tia phân giác của các góc* $\widehat{AOD}$ *và* $\widehat{BOC}$. *Chứng minh rằng* $Ox \perp Oy$.

Giải



a. Vì các tia OC và OD ở trong góc $\widehat{AOB}$ nên:

$$\widehat{AOD} = \widehat{AOC} - \widehat{COD} = 90^0 - \widehat{COD}. \ (1)$$

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} - \widehat{COD} = 90^0 - \widehat{COD}. \ (2)$$

Từ (1), (2), suy ra:

$$90^0 - \widehat{COD} = 90^0 - \widehat{COD} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BOC}, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có: $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) + \widehat{COD} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$

$$= \widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 90^0 + 90^0 = 180^0, \text{ đpcm.}$$

c. Từ giả thiết, ta có: $\widehat{AOD} = 2\widehat{xOD}$.

$$\widehat{COy} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \widehat{xOD}.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\widehat{xOy} = \widehat{xOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COy} = 2\widehat{xOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOC} = 90^0$$

$\Leftrightarrow Ox \perp Oy$, đpcm.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho đoạn thẳng AB = 8cm. Hãy trình bày cách vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 2: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA.

a. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

b. Có nhận xét gì về ba đường trung trực trên.

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD.

a. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD. Có nhận xét gì về hai đường trung trực này.

b. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AD, BC. Có nhận xét gì về hai đường ttrung trực này.

c. Nhận xét gì về hai đường trung trực của AB và AD.

Bài 4: Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ góc* $\widehat{xOy}$ *có số đo bằng* 45^0. *Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy. Gọi C là giao điểm của a và b* ".

Bài 5: Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ góc* $\widehat{xOy}$ *có số đo bằng* 80^0. *Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên tia Oy rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B. Gọi C là giao điểm của a và b* ".

Bài 6: Chứng minh rằng góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông.

Bài 7: Cho góc $\widehat{xOy}$ và tia Oz nằm trong góc đó sao cho $\widehat{xOz} = 4\widehat{yOz}$. Tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOz}$ thoả mãn Ot ⊥ Oy. Tính số đo của góc $\widehat{xOy}$.

Bài 8: Cho góc $\widehat{xOy} = 90^0$. Trong góc $\widehat{xOy}$ vẽ các tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60^0$.

a. Tính số đo của các góc $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOC}$, $\widehat{COB}$.

b. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng OA và chứa tia OB ta vẽ tia OE sao cho OB là phân gíc của góc $\widehat{DOE}$. Chứng minh rằng OC ⊥ OE.

Bài 9: Cho góc tù $\widehat{AOB}$. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia OC sao cho $\widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 180^0$. Vẽ tia phân giác OD của góc $\widehat{BOC}$.

a. $\widehat{BOC} + 2\widehat{AOC} = 180^0$.

b. Chứng minh rằng OA ⊥ OD.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

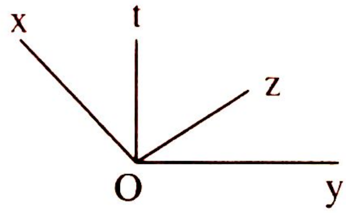
Bài 2: Ba đường trung trực đồng quy tại một điểm - *Điểm này được chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Bài 3:

a. Hai đường trung trực này trùng nhau.

b. Hai đường trung trực này trùng nhau.

c. Hai đường trung trực này vuông góc với nhau.



Bài 7: Ta có:

$\widehat{xOy} = \widehat{xOz} + \widehat{yOz} = 4\widehat{yOz} + \widehat{yOz} = 5\widehat{yOz}$. (1)

Mặt khác ta lại có: $\widehat{yOt} = 90^0$

$\Leftrightarrow 90^0 = \widehat{yOz} + \widehat{zOt} = \widehat{yOz} + \frac{1}{2}\widehat{xOz} = \widehat{yOz} + \frac{1}{2}.4\widehat{yOz} = 3\widehat{yOz}$

$\Leftrightarrow \widehat{yOz} = 30^0$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $\widehat{xOy} = 5.30^0 = 150^0$. Vậy, ta tìm được $\widehat{xOy} = 150^0$.

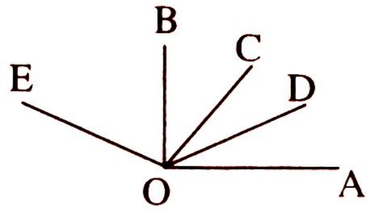
Bài 8:

a. Ta có ngay:

$\widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD} = 90^0 - 60^0 = 30^0$.

$\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 90^0 - 60^0 = 30^0$.

$\widehat{COD} = \widehat{AOC} - \widehat{AOD} = 60^0 - 30^0 = 30^0$.



b. Ta có ngay:

$\widehat{COE} = \widehat{COB} + \widehat{BOE} = \widehat{COB} + \widehat{BOD} = 30^0 + 60^0\ 90^0 \Leftrightarrow$ OC ⊥ OE, đpcm.

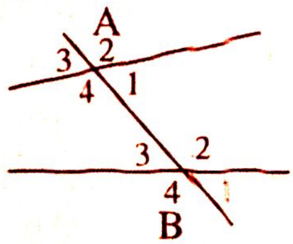
CHỦ ĐỀ 3

CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. GÓC SO LE TRONG. GÓC ĐỒNG VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu với giả thiết cho hai đường thẳng a và b. Vẽ đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B.



Khi đó:

- Tại giao điểm A ta có 4 góc là:
  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$.
- Tại giao điểm B ta có 4 góc là:
  $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$.

Để thiết lập mối tương quan giữa các góc ở đỉnh A và các góc tại đỉnh B người ta sử dụng các định nghĩa:

- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_4$ được gọi là các cặp góc *đồng vị*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_2$ được gọi là các cặp góc *so le trong*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_3$ được gọi là các cặp góc *trong cùng phía*.

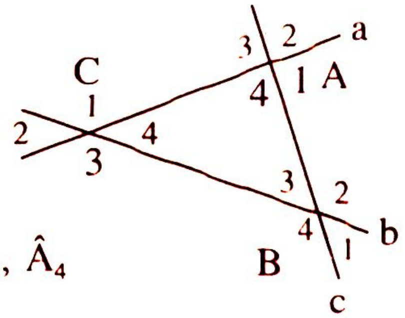
2. TÍNH CHẤT

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có:

1. Một cặp góc đồng vị bằng nhau thì:
   a. Hai góc đồng vị còn lại bằng nhau.
   b. Hai góc so le trong bằng nhau.
2. Một cặp góc so le trong bằng nhau thì:
   a. Hai góc so le trong còn lại bằng nhau.
   b. Hai góc đồng vị bằng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.*



Giải

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B. Khi đó:

- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_4$ được gọi là các cặp góc *đồng vị*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_2$ được gọi là các cặp góc *so le trong*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_3$ được gọi là các cặp góc *trong cùng phía*.

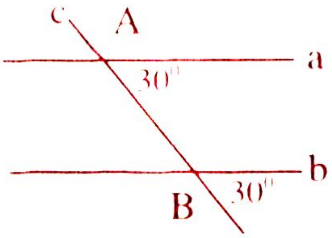
Trường hợp 2: Đường thẳng b cắt cả a và c theo thứ tự tại B, C.

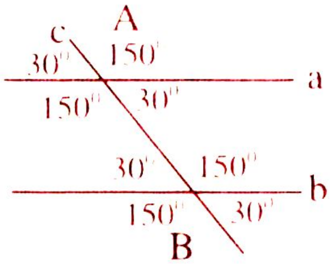
Học sinh tự làm.

Trường hợp 3: Đường thẳng a cắt cả b và c theo thứ tự tại A, C.

Học sinh tự làm.

Ví dụ 2: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*

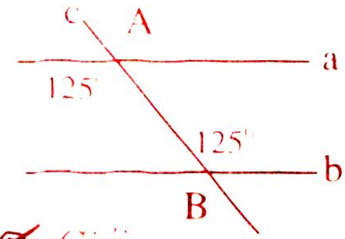


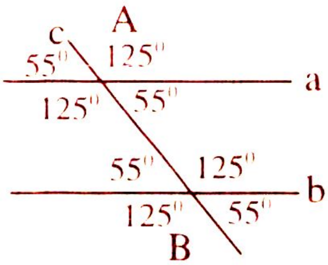


✍ *Giải*

Từ hình vẽ nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau, do đó ta nhận được kết quả điền như sau:

Ví dụ 3: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*



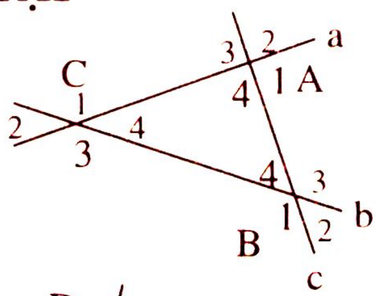


✍ *Giải*

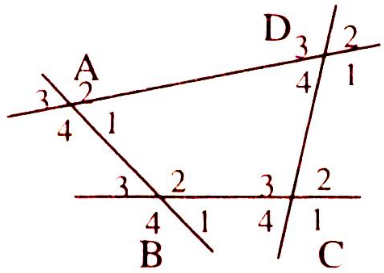
Từ hình vẽ nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau, do đó ta nhận được kết quả điền như sau:

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

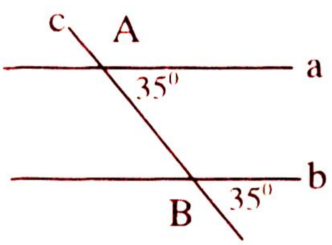
Bài 1: Xem hình vẽ trang bên rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

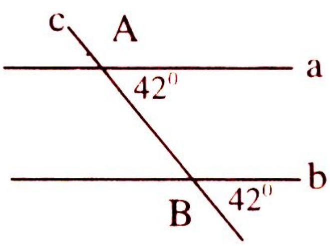


Bài 2: Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

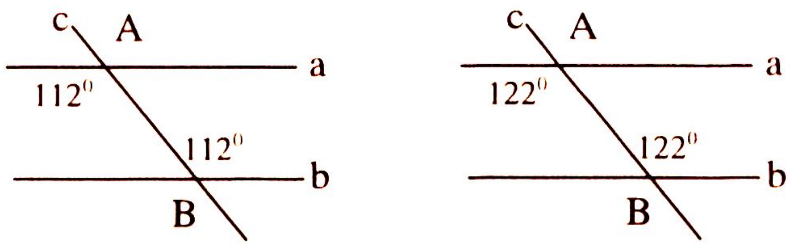


Bài 3: Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

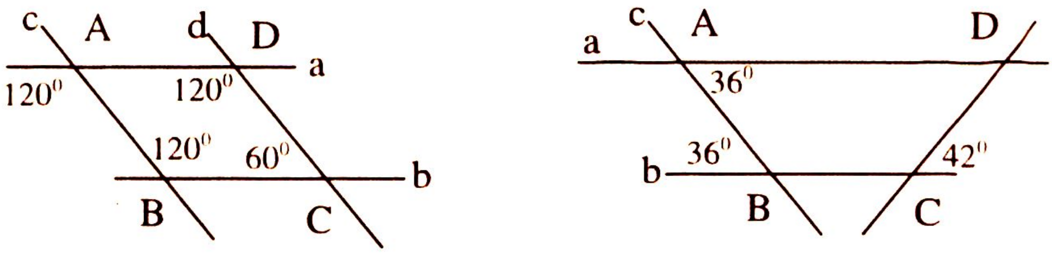




Bài 4: Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

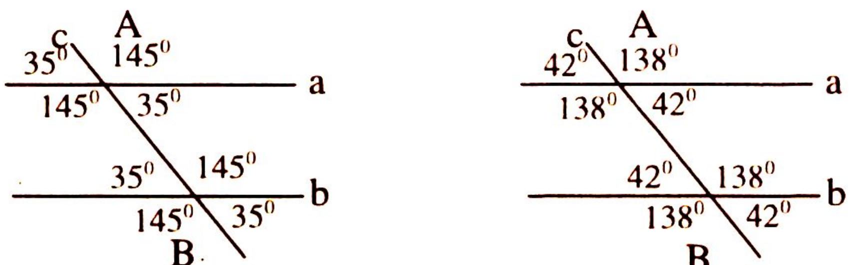


Bài 5: Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

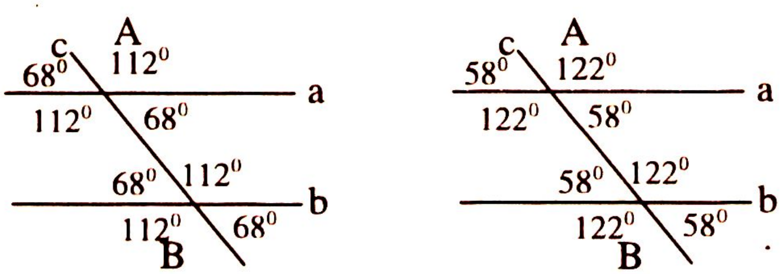


D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

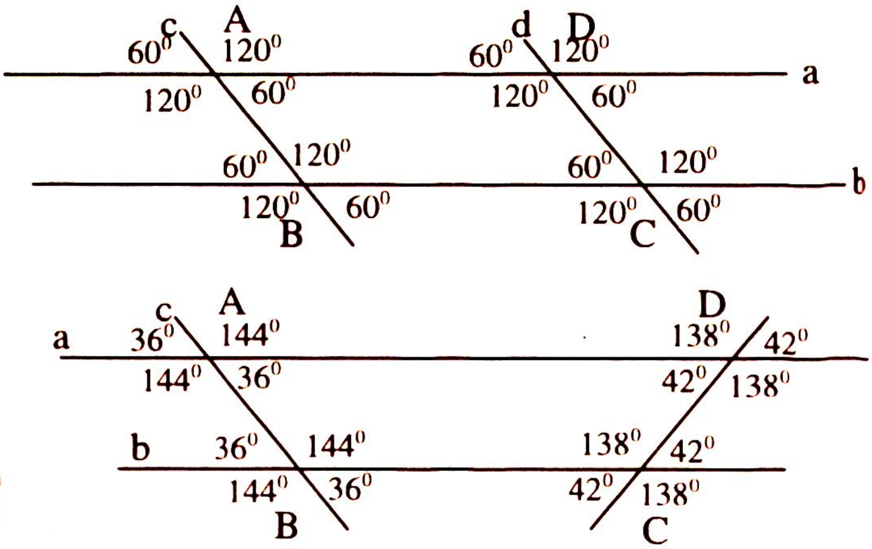
Bài 3: Ta được:



Bài 4: Ta được:



Bài 5: Ta được:



CHỦ ĐỀ 4

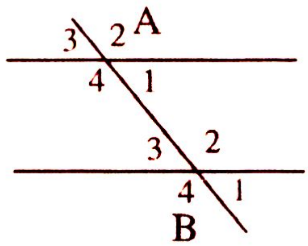
HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b ***song song với nhau.***

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ta có hai đường thẳng a và b song song với nhau nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:



$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$; $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$;

$\hat{A}_3 = \hat{B}_3$; $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$;

$\hat{A}_1 = \hat{B}_3$; $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$.

Hai đường thẳng a và b song song với nhau thì:

- Kí hiệu a // b.
- Khi đó ta còn có thể nói:

" *Đường thẳng a song song với đường thẳng b* "

hoặc " *Đường thẳng b song song với đường thẳng a* ".

2. VẼ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

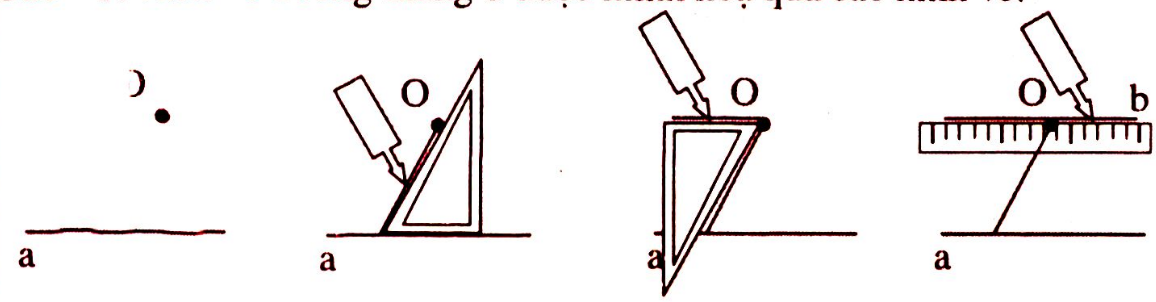
Qua một điểm O ở ngoài đường thẳng a chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng a.

Bài toán: Cho một điểm O và một đường thẳng a không đi qua O. Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và song song với đường thẳng a.

Cách thực hiện

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1:Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.



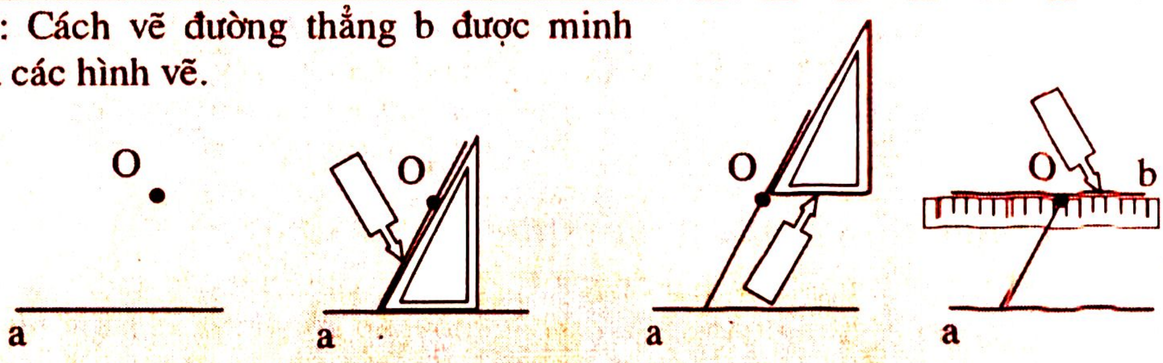
Hình ban đầu

- Đặt êke với một cạnh góc vuông trùng với đường thẳng a và cạnh huyền đi qua O.
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh huyền

- Đặt êke với cạnh huyền trùng với tia vừa vẽ và một đỉnh trùng với O.
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh góc vuông.

Đặt thước trùng với tia vừa vẽ rồi dùng bút kéo dài tia.

Cách 2: Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.



3. **TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

1. Hai góc so le trong bằng nhau.
2. Hai góc đồng vị bằng nhau.
3. Hai góc trong cùng phía bù nhau.

☛ ***Chú ý***:

- Nếu a // b thì mỗi đoạn thẳng (mỗi tia) thuộc đường thẳng a sẽ song song với mỗi đoạn (mỗi tia) thuộc đường thẳng b.
- Hai đoạn thẳng (hoặc hai tia) không có điểm chung thì chưa chắc song song với nhau.

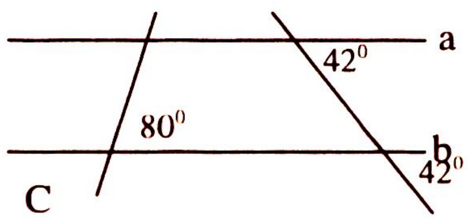
4. **CẶP GÓC CÓ CẠNH TƯƠNG ỨNG SONG SONG**

Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

1. Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
2. Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.
3. Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

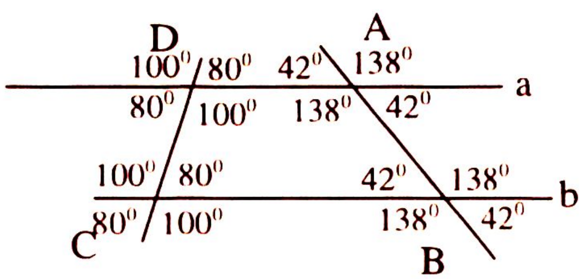
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*



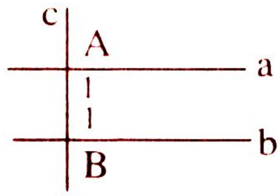
✍ *Giải*

Từ hình vẽ ta thấy ngay a // b. nên ta nhận được kết quả điền như sau:



Ví dụ 2: *Biết rằng hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c. Chứng tỏ rằng a // b.*

Giải



Theo giả thiết:

$a \perp c \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^0$.

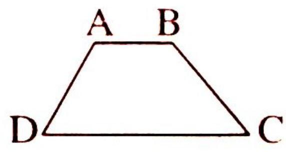
$b \perp c \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 90^0$.

Khi đó, ta nhận được:

$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Leftrightarrow$ a // b, vì có hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 3: *Tính các góc của hình* ABCD (AB // CD), *biết* $\hat{A} = 3\hat{D}$ *và* $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$.

Giải



Vì ABCD là hình thang với AB // CD, ta có:

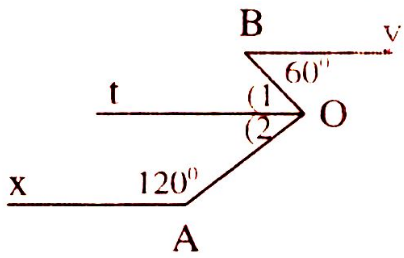
$180^0 = \hat{A} + \hat{D} = 3\hat{D} + \hat{D} = 4\hat{D}$

$\Leftrightarrow \hat{D} = 45^0 \Rightarrow \hat{A} = 135^0$.

$180^0 = \hat{B} + \hat{C} \overset{\hat{B}-\hat{C}=30^0}{=} (30^0 + \hat{C}) + \hat{C} = 30^0 + 2\hat{C} \Leftrightarrow \hat{C} = 75^0$

$\Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 105^0$.

Ví dụ 4: *Trên hình vẽ bên, cho* $\widehat{AOB} = 120^0$ *và* Ot *là tia phân giác của góc* $\widehat{AOB}$. *Chứng minh rằng* Ax // Ot *và* By // Ot.



Giải

Theo giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB} = 120^0$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 60^0$.

Nhận xét rằng:

- Vì $\hat{O}_1 = \widehat{OBy}$ nên Ot // By bởi vì chúng có hai góc so le trong bằng nhau.
- Vì $\hat{O}_2 + \widehat{OAx} = 180^0$ nên Ot // Ax bởi vì chúng có hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC. *Tính tổng* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

Giải

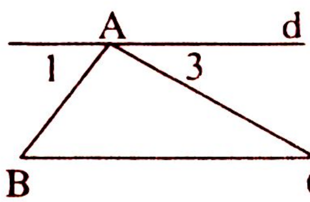
Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC, ta ngận thấy ngay:

$\hat{B} = \hat{A}_1$, vì so le trong.

$\hat{C} = \hat{A}_3$, vì so le trong.

Khi đó:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^0$.



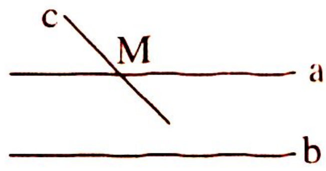
☞ ***Nhận xét***:

- Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng *phương pháp dựng thêm hình phụ* để thực hiện. Nếu biết cách vận dụng phương pháp này thì nhiều bài toán sẽ được giải quyết một cách khá đơn giản – Chúng ta sẽ còn gặp lại phương pháp này trong những chủ đề tiếp theo.
- Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

  " *Tổng ba góc trong một tam giác luôn bằng* 180^0 ".

Ví dụ 6: *Cho* a // b *chứng tỏ rằng nếu đường thẳng* c *cắt đường thẳng* a *thì cũng cắt đường thẳng* b.

✍ *Giải*



Giả sử đường thẳng c cắt đường thẳng a tại điểm M.

Giả sử trái lại c không cắt b, tức là:

c // b.

Khi đó " *Qua điểm M kẻ được hai đường thẳng phân biệt a và c song song với b* ", điều này mâu thuẫn với tiên đề Ơ – clit.

Vậy, c luôn cắt b.

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng *phương pháp chứng minh bằng phản chứng* để thực hiện. Lược đồ khi sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để chứng minh tính chất K được minh hoạ theo các bước:

   Bước 1: Giả sử trái lại tính chất K không đúng, khi đó ta có tính chất K'.

   Bước 2: Khai thác tính chất K' dẫn tới điều mâu thuẫn.

   Bước 3: Kết luận về tính chất K.
2. Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

   " *Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cắt đường thẳng còn lại* ".

Ví dụ 7: *Qua điểm* A *ở ngoài đường thẳng* a *vẽ* n + 1 *đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có* n *đường thẳng cắt* a.

✍ *Giải*

Giả sử trái lại, trong số n + 1 đường thẳng phân biệt kẻ qua điểm A có chưa đến n đường thẳng cắt a.

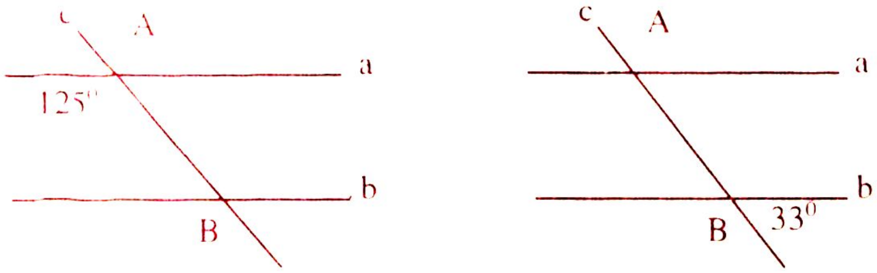
Suy ra, còn lại ít nhất hai đường thẳng không cắt a.

Vậy, hai đường thẳng này sẽ cùng đi qua A và song song với a, điều này mâu thuẫn vì nó trái với tiên đề Ơ – clit.

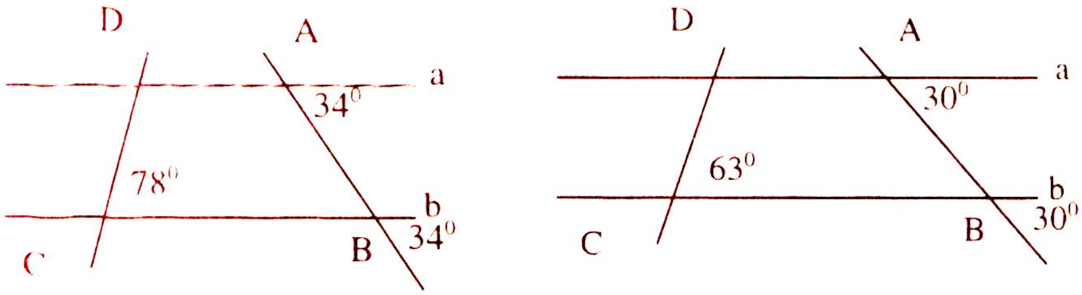
Vậy, ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Biết a // b, hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:

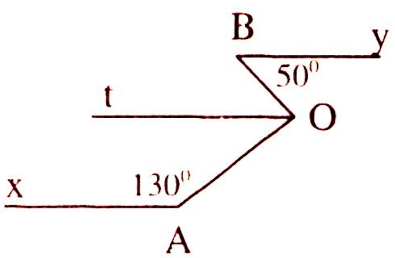


Bài 2: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Bài 3: Cho hình ABCD (AB // CD). Tính các góc $\hat{B}$ và $\hat{D}$ biết $\hat{A} = 60^0$ và $\hat{C} = 130^0$.

Bài 4: Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 100^0$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng Ax // Ot và By // Ot.



Bài 5: Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết Ox // O'x' (cùng chiều) và Oy // O'y' (cùng chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Bài 6: Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết Ox // O'x' (cùng chiều) và Oy // O'y' (ngược chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^0$.

Bài 7: Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 100 đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 99 đường thẳng cắt a.

Bài 8: Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và một điểm A ở trong góc đó. Một đường thẳng a đi qua điểm A và song song với Ox. Chứng minh rằng a cắt Oy.

Bài 9: Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng song song bị cắt bởi một cát tuyến thì:

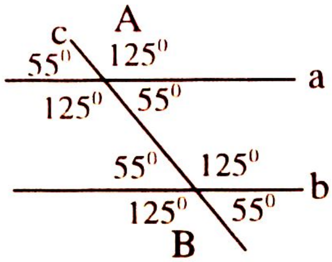
a. Hai tia phân giác của một cặp góc so le trong song song với nhau.

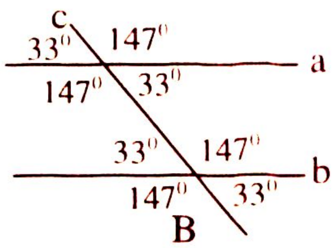
b. Hai tia phân giác của một cặp góc đồng vị song song với nhau.

c. Hai tia phân giác của một cặp góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

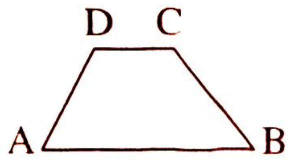
D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta được:





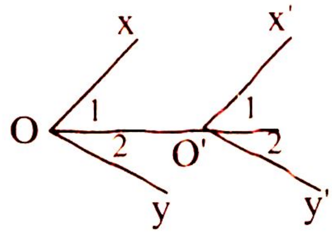
Bài 3: Khi đó:



$\hat{D} = 180^0 - \hat{A} = 120^0$,

$\hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 50^0$.

Bài 5: Nối OO', ta có nhận xét rằng:



- Vì $Ox // O'x'$ nên $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ do đồng vị.
- Vì $Oy // O'y'$ nên $\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ do đồng vị.

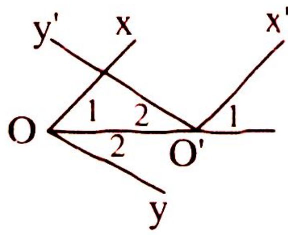
Khi đó:

$$\widehat{xOy} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2 = \widehat{x'O'y'}, \text{ đpcm.}$$

☛ ***Nhận xét***: Qua bài tập trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

"Hai góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều thì bằng nhau".

Bài 6: Nối OO', ta có nhận xét rằng:



- Vì $Ox // O'x'$ nên $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ do đồng vị.
- Vì $Oy // O'y'$ nên $\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ do so le.

Khi đó:

$$\widehat{xOy} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2 = 180^0 - \widehat{x'O'y'}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^0, \text{ đpcm.}$$

Bài 7: *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

Bài 8: *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

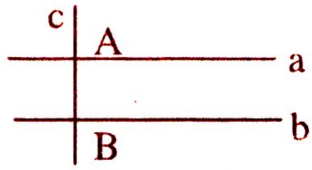
5. QUAN HỆ GIỮA TÍNH VUÔNG GÓC VỚI TÍNH SONG SONG

Chúng ta ghi nhận kết quả:

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

  Cụ thể, ta có minh hoạ:

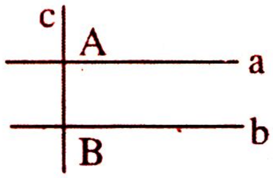
$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$



- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.

  Cụ thể, ta có minh hoạ:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow b \perp c.$$

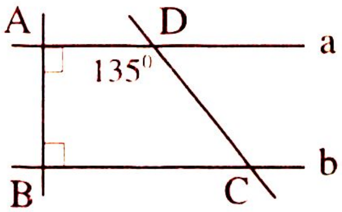


6. BA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*

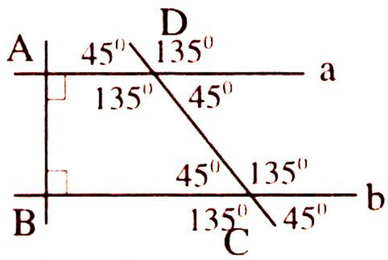


Giải

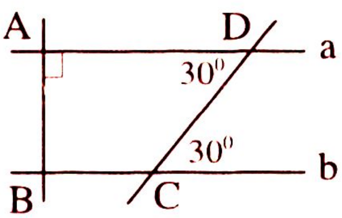
Với hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} a \perp AB \\ b \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \parallel b,$$

từ đó, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.



Ví dụ 2: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*

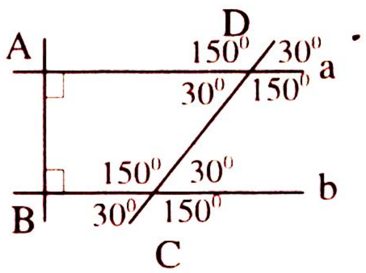


Giải

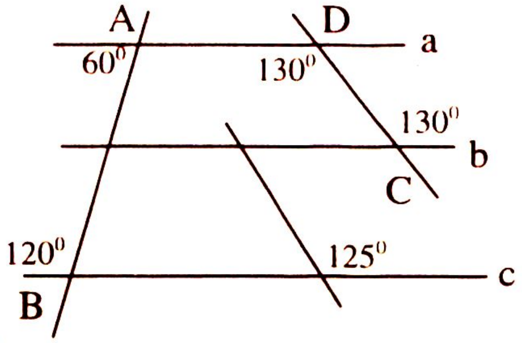
Với hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp AB \end{cases} \Rightarrow b \perp AB,$$

từ đó, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.



Ví dụ 3: *Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:*



Giải

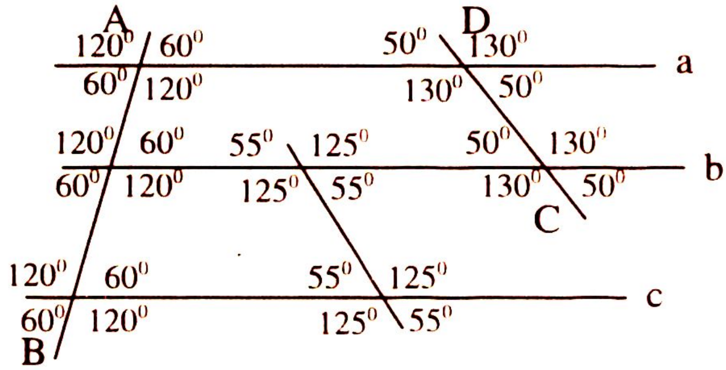
Với hình vẽ, ta có:

a // b vì có hai góc so le trong bằng nhau.

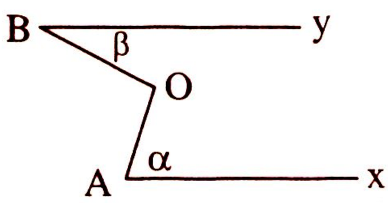
a // c vì có hai góc trong cùng phía phụ nhau.

suy ra a // b // c.

Vậy, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.



Ví dụ 4: *Trên hình vẽ dưới đây, cho* $\widehat{AOB} = \alpha + \beta$. *Chứng minh rằng:* Ax // By.



Giải

Trong góc $\widehat{AOB}$ dựng tia Ot // Ax, suy ra:

$\hat{O}_2 = \hat{A} = \alpha$.

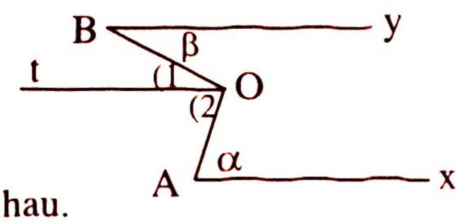
Khi đó:

$\hat{O}_1 = \widehat{AOB} - \hat{O}_2 = \alpha + \beta - \alpha = \beta = \hat{B}$

$\Leftrightarrow$ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Vậy, ta có:

Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.



Nhận xét:

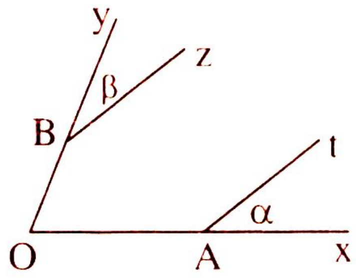
1. Như vậy, trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng thêm đường phụ là tia Ot. Một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra là "*Tại sao lại nghĩ được như vậy?*". Câu trả lời có thể được lí giải như sau:

- Ta thấy hai tia Ax và By chưa có một cát tuyến nên chưa thể có được các cặp góc so le trong hoặc cặp góc trong cùng phía.
- Theo hình vẽ ta có hai cát tuyến chung gốc O là OA và OB.

Chính vì vậy, ta nghĩ ngay tới việc sử dụng một đường thẳng chung gian đi qua O, đó chính là tia Ot.

2. Ở đây, để chứng minh hai đường thẳng song song, ta đi chứng minh nó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Thí dụ tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng điều ngược lại, tức là với hai đường thẳng song song cho trước chúng ta sẽ tạo ra một đường thẳng song song với chúng để thực hiện đòi hỏi của bài toán.

Ví dụ 5: *Trên hình vẽ, cho* $\widehat{xOy} = \alpha + \beta$. *Chứng minh rằng* At // Bz.



Giải

Trong góc $\widehat{AOB}$ dựng tia Om // At, suy ra:

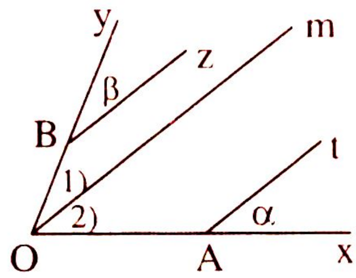
$\hat{O}_2 = \widehat{xAt} = \alpha$.

Khi đó:

$\hat{O}_1 = \widehat{xOy} - \hat{O}_2 = \alpha + \beta - \alpha$

$= \beta = \widehat{yBz}$

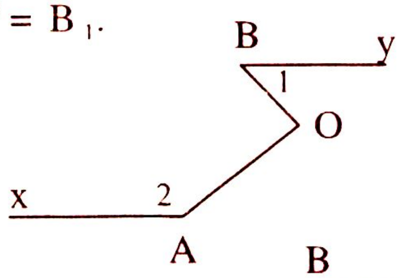
$\Leftrightarrow$ Om // Bz, vì có hai góc đồng vị trong bằng nhau.



Vậy, ta có:

Om // At và Om // Bz $\Rightarrow$ At // Bz, đpcm.

Ví dụ 6: *Trên hình vẽ, cho* $\widehat{AOB} + \hat{A}_2 - 180^0 = \hat{B}_1$. *Chứng minh rằng* Ax // By.



Giải

Trong góc $\widehat{AOB}$ dựng tia Ot // Ax, suy ra:

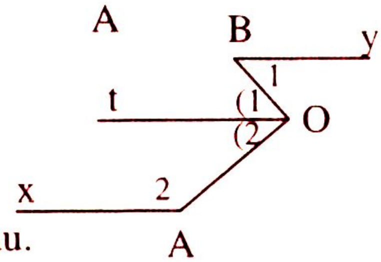
$\hat{A}_2 + \hat{O}_2 = 180^0$.

Khi đó:

$\hat{O}_1 = \widehat{AOB} - \hat{O}_2 = \widehat{AOB} - (180^0 - \hat{A}_2)$

$= \widehat{AOB} + \hat{A}_2 - 180^0 = \hat{B}_1$

$\Leftrightarrow$ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

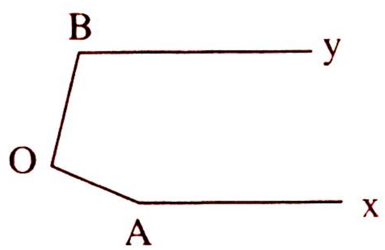


Vậy, ta có:

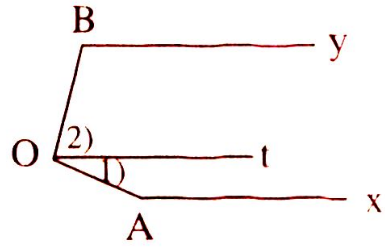
Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

Ví dụ 7: *Trên hình vẽ, cho* Ax // By. *Chứng minh rằng:*

$$\hat{A} + \widehat{AOB} + \hat{B} = 360^0.$$



Giải



Dựng tia Ot // Ax, suy ra:

$\hat{O}_1 + \hat{A} = 180^0$.

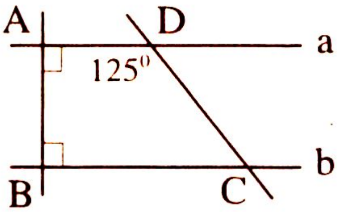
Mặt khác, vì Ax // By nên Ot // By, suy ra:

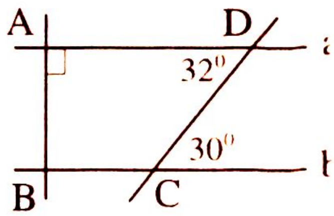
$\hat{O}_2 + \hat{B} = 180^0$.

Vậy, ta có: $\hat{A} + \widehat{AOB} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{B} = 180^0 + 180^0 = 360^0$.

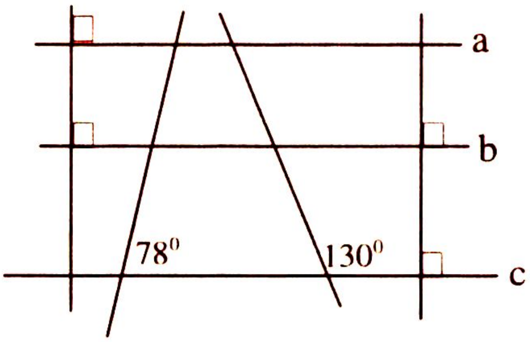
C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

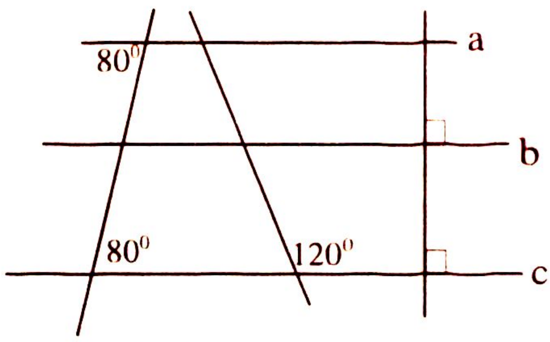
Bài 1: Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:



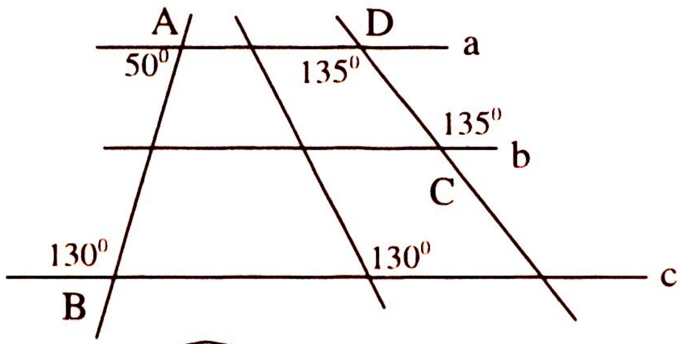


Bài 2: Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

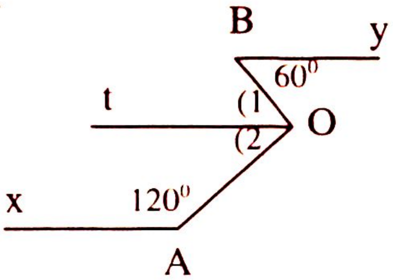




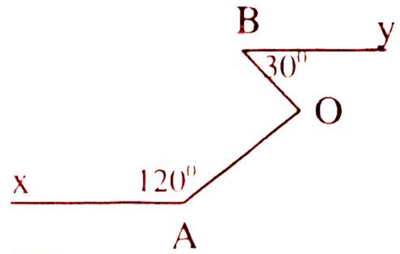
Bài 3: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



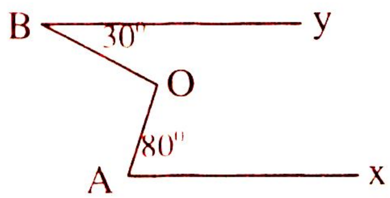
Bài 4: Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 120^0$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng Ax // By.



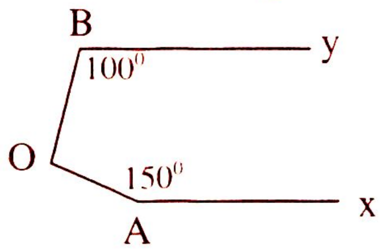
Bài 5: Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 90^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài 6: Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 110^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài 7: Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 110^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài 8: Cho ΔABC và một đường thẳng d song song với BC. Chứng minh rằng:

a. Nếu d cắt cạnh AB thì d cắt cạnh AC.

b. Nếu d cắt tia đối của tia BA thì d cắt tia đối của tia CA.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 4: Theo giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB} = 120^0$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 60^0$.

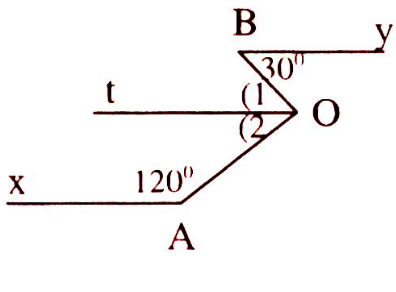
Nhận xét rằng:

- Vì $\hat{O}_1 = \widehat{OBy}$ nên Ot // By bởi vì chúng có hai góc so le trong bằng nhau.
- Vì $\hat{O}_2 + \widehat{OAx} = 180^0$ nên Ot // Ax bởi vì chúng có hai góc trong cùng phía bù nhau.

Vậy, ta có:

Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

Bài 5: Trong góc $\widehat{AOB}$ dựng tia Ot // Ax, suy ra:



$\hat{A} + \hat{O}_2 = 180^0$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{A} = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Khi đó:

$\hat{O}_1 = \widehat{AOB} - \hat{O}_2 = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \hat{B}$

$\Leftrightarrow$ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Vậy, ta có: Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

CHƯƠNG II – **TAM GIÁC**

CHỦ ĐỀ 1

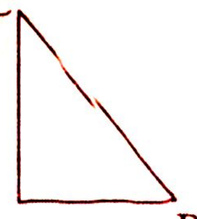
TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0.

2. ÁP DỤNG VÀO TAM GIÁC VUÔNG



Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

Với ΔABC có $\hat{A} = 90^0$, ta nói:

- ΔABC vuông tại A.
- AB, AC gọi là các cạnh góc vuông và BC là cạnh huyền.
- Các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ là hai góc nhọn của tam giác.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A ta sẽ nhận được $\hat{A} = 90^0$.

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} = 90^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{B} \text{ và } \hat{C} \text{ phụ nhau.}$$

Vậy, ta có kết quả "*Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau*".

3. GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

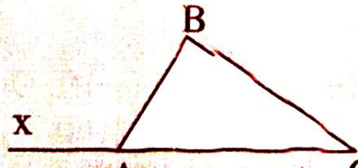
Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

☛ ***Nhận xét***:

- Ta có:

$$\widehat{xAB} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{xAB} = 180^0 - \hat{A}.$$

Mặt khác, ta có:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C}$$

Từ đó, suy ra:

$$\widehat{xAB} = 180^0 - (180^0 - \hat{B} - \hat{C}) = \hat{B} + \hat{C}.$$

Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

- Ta có:

$$\widehat{xAB} = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \widehat{xAB} > \hat{B} \text{ và } \widehat{xAB} > \hat{C}.$$

Từ đây, ta thu được nhận xét quan trọng "*Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó*".

4. CẶP GÓC CÓ CẠNH TƯƠNG ỨNG VUÔNG GÓC

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

1. Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
2. Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.
3. Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

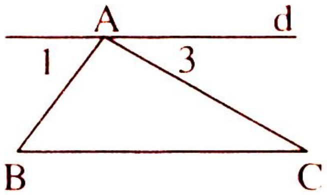
Ví dụ 1: *Cho ΔABC. Tính $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.*

✍ *Giải*

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC, ta nhận thấy ngay:

$\hat{B} = \hat{A}_1$, vì so le trong.

$\hat{C} = \hat{A}_3$, vì so le trong.



Khi đó:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^0.$$

☞ ***Nhận xét:*** Như vậy, để tính được tổng của ba góc trong một tam giác chúng ta đã lựa chọn cách chuyển chúng về các góc cùng đỉnh (trong lời giải này chúng ta lựa chọn đỉnh A). Các em học sinh hãy sử dụng đỉnh B, C để tìm lại kết quả trên.

Ví dụ 2: *Tính tổng ba góc ngoài của một tam giác.*

✍ *Giải*

Gọi $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ theo thứ tự là ba góc ngoài của các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ của ΔABC.

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

$$\hat{A}_1 = 180^0 - \hat{A},\ \ \hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B},\ \ \hat{C}_1 = 180^0 - \hat{C}$$

suy ra:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = (180^0 - \hat{A}) + (180^0 - \hat{B} + (180^0 - \hat{C})$$

$$= 540^0 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 540^0 - 180^0 = 360^0, \text{ đpcm}$$

Ví dụ 3: *Cho ΔABC, biết $\hat{A} = 45^0$ và $\hat{B} = 80^0$. Tính số đo của góc $\hat{C}$.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 45^0 - 80^0 = 55^0.$$

Vậy, ta có $\hat{C} = 55^0$.

Ví dụ 4: *Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 10^0$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$.*

✍ *Giải*

Từ giả thiết:

$$\hat{B} - \hat{C} = 10^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 10^0 + \hat{C}.$$

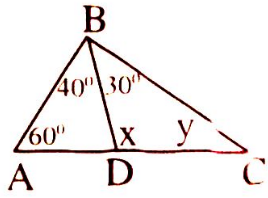
Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 60^0 + 10^0 + \hat{C} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{C} = 110^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 55^0$$

Khi đó: $\hat{B} = 10^0 + \hat{C} = 10^0 + 55^0 = 65^0$.

Vậy, ta tìm được $\hat{B} = 65^0$, $\hat{C} = 55^0$.

Ví dụ 5: *Tính số đo x và y ở hình vẽ bên.*



✍ *Giải*

Trong ΔABD, ta có:

$$x = \widehat{CDB} = \hat{A} + \widehat{ABD} = 60^0 + 40^0 = 100^0.$$

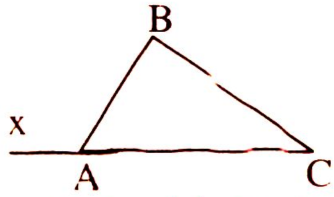
Trong ΔBCD, ta có:

$$\hat{C} + \widehat{CDB} + \widehat{CBD} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow y = \hat{C} = 180^0 - \widehat{CDB} - \widehat{CBD} = 180^0 - 100^0 - 30^0 = 50^0.$$

Vậy, ta được $x = 100^0$ và $y = 50^0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ta có:



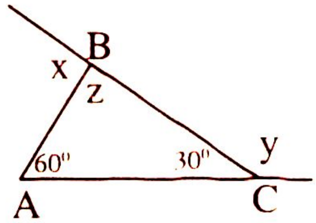
$$\widehat{xAB} = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \widehat{xAB} > \hat{B} \text{ và } \widehat{xAB} > \hat{C}.$$

Từ đây, ta thu được nhận xét quan trọng:

"*Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó*".

Kết quả này sẽ có ích trong các bài toán so sánh góc, để minh hoạ chúng ta xem xét thí dụ sau:

Ví dụ 6: *Tính số đo x, y và z ở hình vẽ bên.*



✍ *Giải*

Ta có ngay:

$$x = \hat{A} + \hat{C} = 60^0 + 30^0 = 90^0.$$

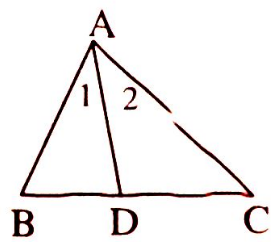
$$y + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow y = 180^0 - \hat{C} = 180^0 - 30^0 = 150^0.$$

$$z = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 60^0 - 30^0 = 90^0.$$

Vậy, ta được $x = 90^0$, $y = 150^0$ và $z = 90^0$.

Ví dụ 7: (Bài 2/tr 108 – Sgk): *Cho* ΔABC *có* $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 30^0$. *Tia phân giác của góc* A *cắt* BC *ở* D. *Tính số đo các góc* $\hat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$.

✍ *Giải*



Ta có: $\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 80^0 - 30^0 = 70^0$.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 35^0.$$

Trong ΔACD, ta có:

$$\widehat{ADB} = \hat{A}_2 + \hat{C} = 35^0 + 30^0 = 65^0.$$

$$\widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ADB} = 180^0 - 65^0 = 115^0.$$

Vậy ta nhận được $\hat{A} = 70^0$, $\widehat{ADB} = 65^0$, $\widehat{ADC} = 115^0$.

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *có số đo các góc* $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ *lần lượt tỉ lệ với* 1, 3, 5. *Tính số đo các góc của* ΔABC.

✍ *Giải*

Trong ΔABC, ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Từ giả thiết ta có: $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 3 + 5} = \frac{180}{9} = 20$.

Từ đó, suy ra:

$$\hat{A} = 20^0,\ \hat{B} = 60^0,\ \hat{C} = 100^0.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 20^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 100^0$.

Ví dụ 9: *Cho* ΔABC, *điểm* M *nằm trong tam giác đó. Tia* AM *cắt* BC *tại* K. *Hãy so sánh các góc:*

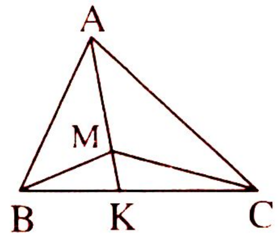
a. $\widehat{CMK}$ *với* $\widehat{CAK}$. b. $\widehat{CMB}$ *với* $\widehat{CAB}$.

✍ *Giải*

a. Xét ΔAMC, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:

$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)



b. Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMK} > \widehat{BAK}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \widehat{CAB}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMB} > \widehat{CAB}$.

☞ ***Chú ý:***

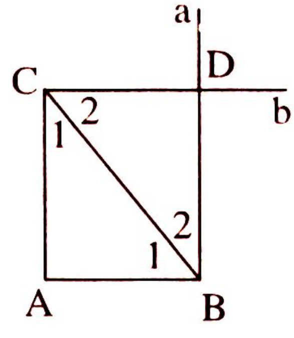
1. Với cách trình bày như trên chúng ta sẽ thực hiện được bài toán " *Cho* ΔABC *vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng góc* $\widehat{BMC}$ *là góc tù* ".
2. Ta thấy, với mỗi đỉnh của tam giác ta có được hai góc (*góc trong và góc ngoài*), từ đó ta cũng sẽ có được hai đường phân giác tương ứng (*phân giác trong và phân giác ngoài*). Vấn đề đặt ra là hai đường phân giác này có mối liên hệ với nhau như thế nào ?

Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Qua* B *kẻ đường thẳng* a *song song với* AC, *qua* C *kẻ đường thẳng* b *song song với* AB. *Giả sử* a, b *cắt nhau tại* D. *Chứng minh rằng* ΔBCD *vuông*.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

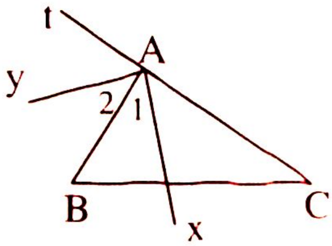


- Vì BD // AC nên $\hat{B}_2 = \hat{C}_1$.
- Vì CD // AB nên $\hat{C}_2 = \hat{B}_1$.
- Vì ΔABC vuông tại A nên :

$$90^0 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \hat{C}_2 + \hat{B}_2$$

$\Leftrightarrow \Delta BCD$ vuông tại D.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC. *Chứng minh rằng hai tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc* $\hat{A}$ *vuông góc với nhau.*



✍ *Giải*

Gọi Ax, Ay theo thứ tự là các tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$, ta phải đi chứng minh $Ax \perp Ay$, tức là chứng minh $\widehat{xAy} = 90^0$.

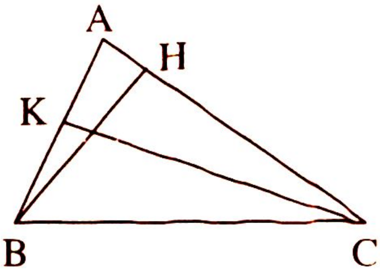
Thật vậy, ta có: $\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BAt}$.

Khi đó:

$$\widehat{xAy} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAt} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{BAt}) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$$, đpcm.

☞ ***Chú ý***: Kể từ đây, chúng ta được phép sử dụng kết quả này vào các bài tập khác.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *nhọn. Vẽ* BH *vuông góc với* AC ($H \in AC$), *vẽ* CK *vuông góc với* AB ($K \in AB$). *Chứng minh rằng* $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.



✍ *Giải*

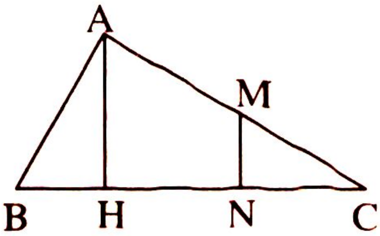
Ta lần lượt có:

- Vì ΔABH vuông tại H nên: $\widehat{ABH} = 90^0 - \hat{A}$. (1)
- Vì ΔACK vuông tại K nên: $\widehat{ACK} = 90^0 - \hat{A}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$, đpcm.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Vẽ* AH *vuông góc với* BC ($H \in BC$). *Lấy điểm* M *bất kì trên cạnh* AC, *vẽ* MN *vuông góc với* BC ($N \in BC$).

a. *Tìm góc bằng góc* $\hat{B}$.
b. *Tìm góc bằng góc* $\hat{C}$.
c. *Tìm góc bù với góc* $\hat{B}$.



✍ *Giải*

a. Ta có: $BA \perp AC$, $BC \perp AH$

Các góc $\hat{B}$ và $\widehat{CAH}$ đều nhọn suy ra $\hat{B} = \widehat{CAH}$

Ta có: $\begin{cases} MN \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AH \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{CAH} = \hat{B}$.

b. Tương tự câu a), ta có ngay $\hat{C} = \widehat{BAH}$.

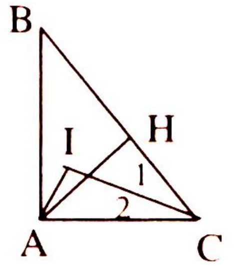
c. Ta có: $BA \perp MA$, $BC \perp MN$

Góc $\hat{B}$ nhọn còn góc $\widehat{AMN}$ tù suy ra $\hat{B} + \widehat{AMN} = 180^0$.

☞ ***Nhận xét***: Ở đây, cũng có thể sử dụng góc có cạnh tương ứng vuông góc để kết luận $\widehat{NMC} = \hat{B}$. Việc trình bày lời giải như trên chỉ với mục đích giúp các em học sinh ôn lại kiến thức về mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc.

Ví dụ 5: *Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC. Các tia phân giác của các góc $\hat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^0$.*

✍ *Giải*



Theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có:

$\widehat{BAH} = \hat{C}$, $\widehat{CAH} = \hat{B}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}, \widehat{BAI} = \widehat{HAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\hat{C}$.

Ta có: $\widehat{AIC} = 180^0 - \widehat{IAC} - \hat{C}_2 = 180^0 - (\widehat{IAH} + \widehat{CAH}) - \hat{C}_2$

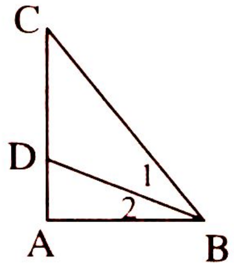
$= 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{C} + \hat{B}) - \frac{1}{2}\hat{C} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Ví dụ 6: *Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ đường phân giác BD, giả sử $\widehat{ADB} = \alpha$.*

a. *Chứng minh rằng $45^0 < \alpha < 90^0$.*

b. *Tính theo α số đo của góc $\hat{C}$.*

✍ *Giải*



a. Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$\widehat{ADB} < 90^0 \Leftrightarrow \alpha < 90^0$. (1)

$\widehat{ADB} = 90^0 - \hat{B}_2 = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}$. (*)

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$\hat{B} < 90^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\hat{B} < 45^0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\hat{B} > -45^0 \Leftrightarrow 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B} > 90^0 - 45^0$

$\Leftrightarrow \widehat{ADB} > 45^0 \Leftrightarrow \alpha > 45^0$. (2)

Từ (1), (2), ta được $45^0 < \alpha < 90^0$, đpcm.

b. Ta có: $\hat{C} = 90^0 - \hat{B}$. (3)

Từ (*), suy ra: $\hat{B} = 180^0 - 2\alpha$. (4)

Thay (4) vào (3), ta được: $\hat{C} = 90^0 - (180^0 - 2\alpha) = 2\alpha - 90^0$.

☞ ***Nhận xét***: Để tránh được việc phải sử dụng các biến đổi dạng bất đẳng thức, chúng ta có thể chứng minh $\alpha > 45^0$ bằng phương pháp chứng minh phản chứng như sau:

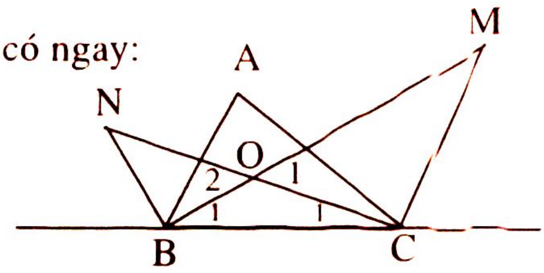
Giả sử trái lại: $\alpha < 45^0 \Leftrightarrow \widehat{ADB} < 45^0$

$\Rightarrow \hat{B}_2 > 45^0 \Leftrightarrow 2\hat{B}_2 > 2.45^0 \Leftrightarrow \hat{B} > 90^0$, mâu thuẫn.

Ví dụ 7: *Cho ΔABC. Đường phân giác của góc B và đường phân giác ngoài của góc C cắt nhau tại M. Đường phân giác của góc C và đường phân giác ngoài của góc B cắt nhau tại N. Chứng minh rằng:*

$\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\hat{A}$.

✍ *Giải*



Dựa trên tính chất hai đường phân giác ta có ngay:

$\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C}$,

$\widehat{OCM} = 90^0$, $\widehat{OBN} = 90^0$.

Vì $\hat{O}_1$ là một góc ngoài của ΔOBC nên:

$$\hat{O}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Trong ΔCMO vuông tại C, ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{OMC} = 90^0 - \hat{O}_1 = 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}) = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Trong ΔBNO vuông tại B, ta có:

$$\widehat{BNC} = \widehat{BNO} = 90^0 - \hat{O}_2 = 90^0 - \hat{O}_1 = 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}) = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Vậy, ta được $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\hat{A}$.

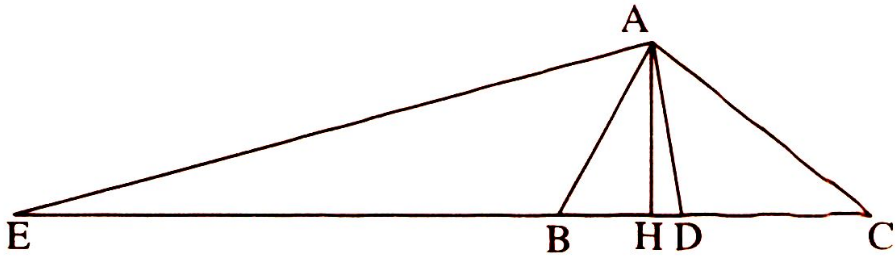
Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *có* $\hat{B} > \hat{C}$. *Gọi* AD, AE *theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc* A (D, E *thuộc đường thẳng* BC).

a. *Chứng minh rằng* $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

b. *Kẻ đường cao* AH. *Chứng minh rằng:* $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$.

c. *Tính số đo của các góc* $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$ *và* $\widehat{HAD}$, *biết* $\hat{B} - \hat{C} = 40^0$.

✍ *Giải*



a. Vì AD là tia phân giác góc Â nên: $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\hat{A}$.

Vì các góc $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$ theo thứ tự là các góc ngoài của ΔABD, ΔACD nên:

$\widehat{ADC} = \hat{B} + \widehat{BAD}$; $\widehat{ADB} = \hat{C} + \widehat{CAD}$.

suy ra: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} + \widehat{BAD} - \hat{C} - \widehat{CAD} = \hat{B} - \hat{C}$, đpcm.

b. Trước tiên ta có:

$\widehat{AEB} = \widehat{HAD}$, vì hai góc có cạnh tương ứng vuông góc.

Ta có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ADB}$. (*)

Thay (*) vào kết quả câu a), ta được:

$$(180^0 - \widehat{ADB}) - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C} \Leftrightarrow 2\widehat{ADB} = 180^0 - (\hat{B} - \hat{C})$$

$\Leftrightarrow \widehat{ADB} = 90^0 - \dfrac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$.

Trong ΔHAD vuông tại H ta lại có:

$$\widehat{HAD} = 90^0 - \widehat{ADH} = 90^0 - \widehat{ADB} = 90^0 - [90^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})]$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}).$$

Vậy, ta được $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \dfrac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$.

c. Theo giả thiết, ta có: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 40^0$. (1)

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^0$. (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\widehat{ADB} = 70^0$, $\widehat{ADC} = 110^0$.

Trong ΔHAD vuông tại H, ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^0 - \widehat{ADH} = 90^0 - \widehat{ADB} = 90^0 - 70^0 = 20^0.$$

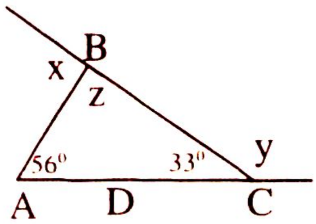
C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

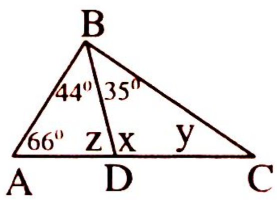
Bài 1: Cho ΔABC. Tính số đo của góc $\hat{C}$, biết:

a. $\hat{A} = 45^0$ và $\hat{B} = 85^0$. b. $\hat{A} = 40^0$ và $\hat{B} = 30^0$.

c. $\hat{A} = \hat{B} = 39^0$. d. $\hat{A} = 36^0$ và $\hat{B} = \hat{C}$.

Bài 2: Tính số đo x, y và z ở các hình vẽ bên.





Bài 3: Tính các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ của ΔABC, biết:

a. $\hat{A} = 80^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^0$. b. $\hat{A} = 100^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^0$.

c. $\hat{A} = 60^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 60^0$. d. $\hat{A} = 40^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$.

Bài 4: Cho ΔABC. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

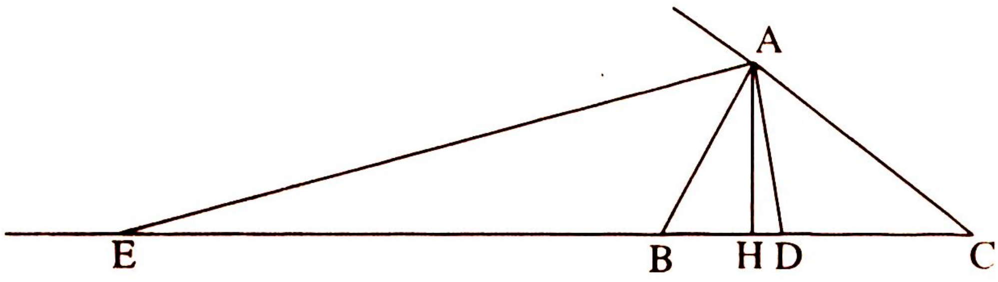
a. $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 40^0$. b. $\hat{A} = 100^0$.

Bài 5: Cho ΔABC. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Tính số đo các góc $\hat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$, biết:

a. $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 44^0$. b. $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 30^0$.

c. $\hat{B} = 50^0$, $\hat{C} = 60^0$.

Bài 6: Điền số đo các góc vào hình vẽ sau, biết $\widehat{BAD} = 45^0$, $\widehat{ABC} = 60^0$, AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\hat{A}$.



Bài 7: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 4, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài 8: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài 9: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của ΔABC và khi đó có kết luận gì về ΔABC ?

Bài 10: Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng góc $\widehat{BMC}$ là góc tù

Bài 11: Cho ΔABC có $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 60^0$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D, E thuộc đường thẳng BC).

a. Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ADB}$.

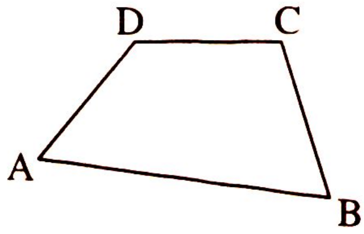
b. Kẻ đường cao AH. Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}$, $\widehat{HAD}$.

Bài 12: Cho ΔABC có $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D, E thuộc đường thẳng BC).

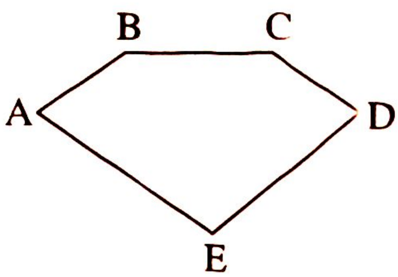
a. Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ADB}$.

b. Kẻ đường cao AH. Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}$, $\widehat{HAD}$.

Bài 13: Chứng minh rằng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$, với các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ được cho trong hình vẽ.



Bài 14: Xác định $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$, với các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ được cho trong hình vẽ.



Bài 15: Chứng minh rằng với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120^0.

Bài 16: Cho ΔABC $\hat{B} = \hat{C} = 50^0$. Gọi Ax là tia phân giác ngoài của góc A. Chứng minh rằng Ax // BC.

Bài 17: Cho ΔABC có $\hat{B} = 3\hat{C}$. Vẽ tia Ax là tia đối của tia AC. Phân giác ngoài của góc A cắt BC tại E. Vẽ tia phân giác Ay của góc EÂx. Chứng minh rằng:

a. ΔAEC là tam giác cân.

b. Ay // BE.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a). $\hat{C} = 50^0$; b). $\hat{C} = 110^0$; c). $\hat{C} = 102^0$; d). $\hat{C} = 72^0$.

Bài 3:

a. Từ giả thiết: $\hat{B} - \hat{C} = 20^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 20^0 + \hat{C}$.

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 80^0 + 20^0 + \hat{C} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{C} = 80^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 40^0$$

Khi đó: $\hat{B} = 20^0 + \hat{C} = 20^0 + 40^0 = 60^0$.

Vậy, ta tìm được $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 40^0$.

b. Từ giả thiết: $\hat{B} - \hat{C} = 20^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 20^0 + \hat{C}$.

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 100^0 + 20^0 + \hat{C} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{C} = 60^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 30^0$$

Khi đó: $\hat{B} = 20^0 + \hat{C} = 20^0 + 30^0 = 50^0$.

Vậy, ta tìm được $\hat{B} = 50^0$, $\hat{C} = 30^0$.

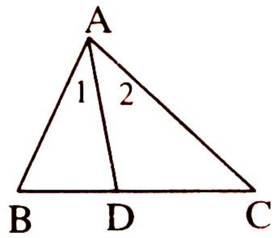
Bài 5:

a. Ta có: $\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 80^0 - 44^0 = 56^0$; $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 28^0$.

Trong ΔACD, ta có:

$$\widehat{ADB} = \hat{A}_2 + \hat{C} = 28^0 + 44^0 = 72^0.$$

$$\widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ADB} = 180^0 - 72^0 = 108^0.$$



Vậy ta nhận được $\hat{A} = 56^0$, $\widehat{ADB} = 72^0$, $\widehat{ADC} = 108^0$.

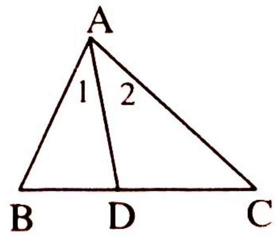
b. Ta có: $\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 80^0 - 30^0 = 70^0$.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 35^0.$$

Trong ΔACD, ta có:

$$\widehat{ADB} = \hat{A}_2 + \hat{C} = 35^0 + 30^0 = 65^0.$$

$$\widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ADB} = 180^0 - 65^0 = 115^0.$$



Vậy ta nhận được $\hat{A} = 70^0$, $\widehat{ADB} = 65^0$, $\widehat{ADC} = 115^0$.

Bài 7: Trong ΔABC, ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 4 + 7} = \frac{180}{12} = 15^0.$$

Từ đó, suy ra:

$$\hat{A} = 15^0, \ \hat{B} = 60^0, \ \hat{C} = 105^0.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 15^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 105^0$.

Bài 9: Trong ΔABC, ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

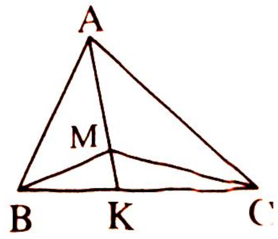
Từ giả thiết ta có: $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180}{6} = 30^0$.

Từ đó, suy ra: $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Như vậy, ta thấy ΔABC vuông tại C.

Bài 10: Xét ΔAMC, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:



$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)

Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMK} > \widehat{BAK}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \hat{A} \Leftrightarrow \widehat{BMK} > 90^0.$$

Vậy, góc $\widehat{CMB}$ là góc tù.

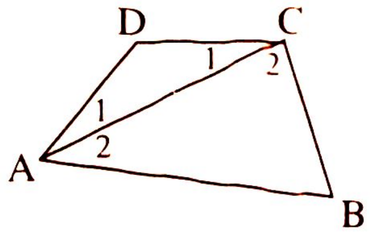
Bài 13: Nối AC, ta lần lượt xét các ΔABC và ΔADC.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C}_2 = 180^0. \quad (1)$$

- Trong ΔADC, ta có:

$$\hat{A}_1 + \hat{D} + \hat{C}_1 = 180^0. \quad (2)$$



Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \hat{B} + \hat{D} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) = 180^0 + 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0, \text{ đpcm.}$$

Bài 14: Nối AC, AD, ta lần lượt xét các ΔABC, ΔACD và ADE.

- Trong ΔABC, ta có:

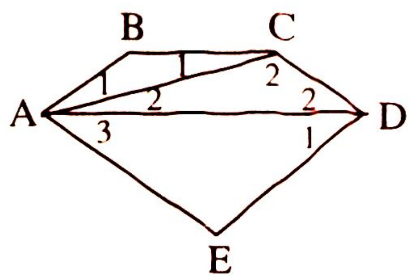
$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^0. \quad (1)$$

- Trong ΔACD, ta có:

$$\hat{A}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 180^0. \quad (2)$$

- Trong ΔADE, ta có:

$$\hat{A}_3 + \hat{D}_1 + \hat{E} = 180^0. \quad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{B} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + \hat{E} = 180^0 + 180^0 + 180^0$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540^0, \text{ đpcm.}$$

Bài 15: *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

Giả sử trái lại, tất cả các góc ngoài $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ của ΔABC đều lớn hơn 120^0, tức là:

$$\hat{A}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - \hat{A} > 120^0 \Leftrightarrow \hat{A} < 60^0, \quad (1)$$

$$\hat{B}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - \hat{B} > 120^0 \Leftrightarrow \hat{B} < 60^0, \quad (2)$$

$$\hat{C}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - \hat{C} > 120^0 \Leftrightarrow \hat{C} < 60^0, \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 60^0 + 60^0 + 60^0 = 180^0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120^0.

Bài 16: *Học sinh tự làm dựa trên hai góc so le trong bằng nhau.*

Bài 17: *Sử dụng kết quả trong phần các ví dụ minh hoạ.*

CHỦ ĐỀ 2

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.*

Nếu có ΔABC bằng $\Delta A_1B_1C_1$, ta kí hiệu $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Như vậy:

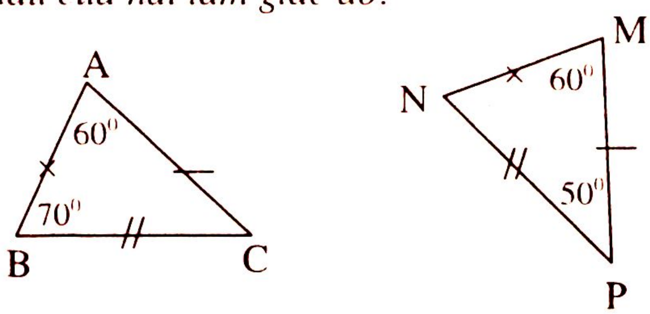
$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ CA = C_1A_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A},\ \hat{B}_1 = \hat{B},\ \hat{C}_1 = \hat{C} \end{cases}.$$

☞ ***Chú ý***: Khi viết $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng: $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$,
và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu bằng:

$$\Delta BAC = \Delta B_1A_1C_1.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không ? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.*



✍ *Giải*

Theo hình vẽ:

- Trong ΔABC, ta suy ra:

$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 60^0 - 70^0 = 50^0.$$

- Trong ΔMNP, ta suy ra:

$$\hat{N} = 180^0 - \hat{M} - \hat{P} = 180^0 - 60^0 - 50^0 = 70^0.$$

Khi đó, với ΔABC và ΔMNP, ta có:

$AB = MN,\ BC = NP,\ CA = PM$ – Các cạnh bằng nhau

$\hat{A} = \hat{M},\ \hat{B} = \hat{N},\ \hat{C} = \hat{P}$ – Các góc bằng nhau

suy ra $\Delta ABC = \Delta MNP$.

☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, ta thấy ngay được việc có thể giảm bớt một yếu tố giả thiết về góc mà hai tam giác vẫn bằng nhau. Điều này chính là lí do để chúng ta cần thiết đi xem xét "*Có bao nhiêu trường hợp bằng nhau của hai tam giác*".

Ví dụ 2: (Bài 11/tr 112 – Sgk): *Cho* $\Delta ABC = \Delta HIK$.

a. *Tìm cạnh tương ứng với cạnh* BC. *Tìm góc tương ứng với góc* H.

b. *Tìm các cạnh bằng nhau, tìm các góc bằng nhau.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Cạnh tương ứng với cạnh BC là cạnh IK.
- Góc tương ứng với góc H là góc A.

b. Ta có ngay: $AB = HI$, $BC = IK$, $AC = HK$; $\widehat{A} = \widehat{H}$, $\widehat{B} = \widehat{I}$, $\widehat{C} = \widehat{K}$.

Ví dụ 3: (Bài 12/tr 112 – Sgk): *Cho* $\Delta ABC = \Delta HIK$ *trong đó* $AB = 2cm$, $\widehat{B} = 40^0$, $BC = 4cm$. *Em có thể suy ra được số đo của những cạnh nào, những góc nào của* ΔHIK ?

✍ *Giải*

Từ tính tương ứng, ta có ngay: $HI = AB = 2cm$, $\widehat{I} = \widehat{B} = 40^0$, $IK = BC = 4cm$.

Ví dụ 4: *Cho* $\Delta ABC = \Delta MNP$.

a. *Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.*

b. (Bài 13/tr 112 – Sgk): *Biết* $AB = 4cm$, $BC = 6cm$ *và* $MP = 5cm$. *Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể viết: $\Delta ACB = \Delta MPN$ hoặc $\Delta BCA = \Delta NPM$.

b. Từ giả thiết: $\Delta ABC = \Delta MNP$

$\Rightarrow MN = AB = 4cm$, $NP = BC = 6cm$ và $MP = AC = 5cm$.

Khi đó, chu vi của các tam giác ΔABC, ΔMNP được cho bởi:

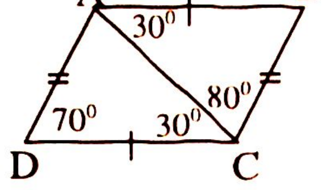
$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 4 + 6 + 5 = 15cm.$

$CV_{\Delta MNP} = MN + NP + PM = 4 + 6 + 5 = 15cm.$

☛ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, ta thấy ngay " *Hai tam giác bằng nhau sẽ có chu vi bằng nhau* ".

Ví dụ 5: *Cho hình vẽ, chứng tỏ rằng hai tam giác* ΔABC, ΔADC *bằng nhau.*

✍ *Giải*



Theo hình vẽ:

- Trong ΔABC, ta suy ra:

$$\widehat{B} = 180^0 - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 180^0 - 30^0 - 80^0 = 70^0.$$

- Trong ΔADC, ta suy ra: $\widehat{DAC} = 180^0 - \widehat{ACD} - \widehat{D} = 180^0 - 30^0 - 70^0 = 80^0$.

Khi đó, với ΔABC và ΔADC, ta có:

$AB = CD$, $BC = DA$, AC chung – Các cạnh bằng nhau

$\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$, $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ – Các góc bằng nhau

suy ra $\Delta ABC = \Delta CDA$.

Ví dụ 6: *Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết rằng $\Delta ABC = \Delta ACB$.*

✍ *Giải*

Từ giả thiết: $\Delta ABC = \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 80^0 + \hat{B} + \hat{B} = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{B} = 100^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 50^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{B} = \hat{C} = 50^0$.

Ví dụ 7: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết có $\hat{A} = 80^0$, $N = 75^0$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

✍ *Giải*

Từ giả thiết: $\Delta ABC = \Delta MNP$

suy ra:

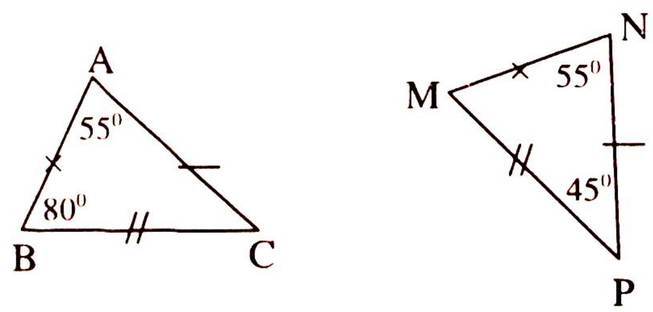
$\hat{A} = \hat{M} = 80^0$,

$\hat{B} = \hat{N} = 75^0$,

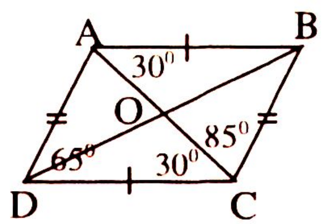
$\hat{C} = \hat{P} = 180^0 - \hat{M} - \hat{N} = 180^0 - 80^0 - 75^0 = 25^0$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không ? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài 2: Hãy chỉ ra các tam giác bằng nhau trong hình sau. Hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài 3: Tính các góc của ΔABC, biết $\Delta ABC = \Delta ACB = \Delta BCA$.

Bài 4: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết có $\hat{A} = 30^0$, $N = 60^0$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

Bài 5: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.

b. Biết AB = 3cm, BC = 4cm và MP = 5cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài 6: Cho ΔABC = ΔADC.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh hoạ.

b. Biết AB = 6cm, DC = 8cm và AC = 10cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài 7: Cho ΔABC = ΔCDA.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh hoạ.

b. Biết AB = 8cm, AD = 15cm và AC = 16cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có ΔABC = ΔNMP.

Bài 2: Ta có ΔABC = ΔCAD, ΔBAD = ΔDCB...

Bài 3: Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

$\Delta ACB = \Delta BCA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow 3\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Bài 4: Từ giả thiết: ΔABC = ΔMNP suy ra:

$\hat{A} = \hat{M} = 30^0$,

$\hat{B} = \hat{N} = 60^0$,

$\hat{C} = \hat{P} = 180^0 - \hat{M} - \hat{N} = 180^0 - 30^0 - 60^0 = 90^0$.

Bài 5:

a. Ta có thể viết: ΔACB = ΔMPN hoặc ΔBCA = ΔNPM.

b. Từ giả thiết: ΔABC = ΔMNP

$\Rightarrow$ MN = AB = 3cm, NP = BC = 4cm và MP = AC = 5cm.

Khi đó, chu vi của các tam giác ΔABC, ΔMNP được cho bởi:

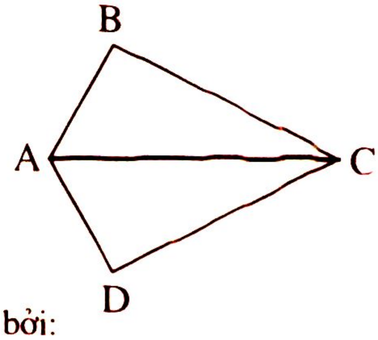
$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3 + 4 + 5 = 12cm.$

$CV_{\Delta MNP} = MN + NP + PM = 3 + 4 + 5 = 12cm.$

Bài 6:

a. Ta có thể viết: ΔACB = ΔACD hoặc ΔBCA = ΔDCA.

Khi đó, ta có thể minh hoạ theo hình vẽ:



b. Từ giả thiết: ΔABC = ΔADC

AB = AD = 6cm, BC = DC = 8cm và AC = 10cm

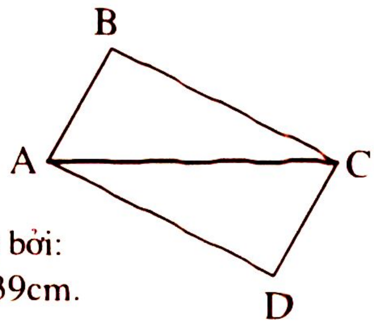
Khi đó, chu vi của các tam giác ΔABC = ΔADC được cho bởi:

$CV_{\Delta ADC} = CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 6 + 8 + 10 = 24cm.$

Bài 7:

a. Ta có thể viết: ΔACB = ΔCAD hoặc ΔBCA = ΔDAC.

Khi đó, ta có thể minh hoạ theo hình vẽ:



b. Từ giả thiết: ΔABC = ΔCDA

AB = CD = 8cm, AD = BC = 15cm và AC = 16cm

Khi đó, chu vi của các tam giác ΔABC = ΔADC được cho bởi:

$CV_{\Delta CDA} = CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 8 + 15 + 16 = 39cm.$

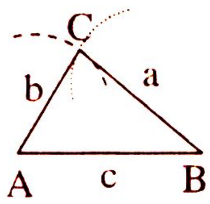
CHỦ ĐỀ 3

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH – CẠNH – CẠNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VẼ TAM GIÁC BIẾT BA CẠNH

Bài toán: *Vẽ ΔABC, biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.*



Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính b, vẽ cung tròn tâm B bán kính a. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH – CẠNH – CẠNH

Định lí: Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

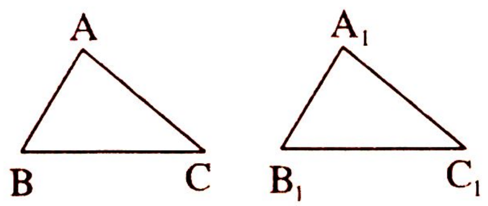
Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

và khi đó ta có ngay:

$\hat{A}_1 = \hat{A}$, $\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$.



☞ ***Nhận xét***:

- Như vậy, để chứng tỏ hai tam giác bằng nhau chúng ta chỉ cần khẳng định ba cặp cạnh bằng nhau mà không cần phải nêu ra đủ 6 yếu tố bằng nhau (3 yếu tố cạnh và 3 yếu tố góc).
- Bằng việc khẳng định được sự bằng nhau của hai tam giác chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với việc chứng minh các tính chất trong tam giác.

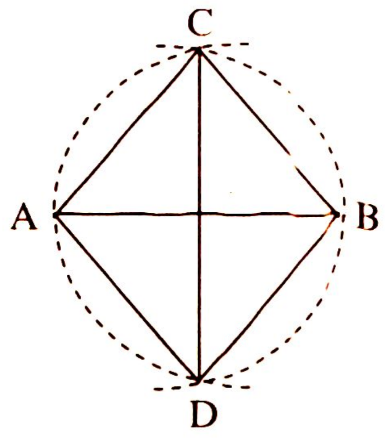
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Ví dụ 1: *Cho đoạn thẳng* AB. *Vẽ hai cung tròn tâm* A, *tâm* B *bán kính* AB, *chúng cắt nhau tại* C *và* D. *Chứng minh rằng*:

a. $\Delta ABC = \Delta ABD$.　　　　b. $\Delta ACD = \Delta BCD$.

✍ *Giải*



Theo cách dựng của giả thiết, ta có:

AB = AC = BC = AD = BD.

a. Ta có ngay :

ΔABC = ΔABD (c.c.c).

b. Ta có ngay :

ΔACD = ΔBCD (c.c.c).

☞ ***Nhận xét***

- Như vậy, để chứng tỏ hai tam giác bằng nhau chúng ta chỉ cần khẳng định ba cặp cạnh bằng nhau mà không cần phải nêu ra đủ 6 yếu tố bằng nhau nữa (3 yếu tố cạnh và 3 yếu tố góc).
- Bằng việc khẳng định được sự bằng nhau của hai tam giác chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với việc chứng minh các tính chất trong tam giác, thí dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

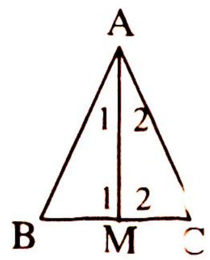
Vấn đề 2: SỬ DỤNG HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GIẢI TOÁN.

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *có* AB = AC. *Gọi* M *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng* AM *là đường trung trực của* BC.

✍ *Giải*

Để chứng minh AM là đường trung trực của BC, ta chỉ cần đi chứng minh AH ⊥ BC.

Xét hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:



AB = AC, giả thiết

BM = CM, vì M là trung điểm BC

AM chung

suy ra:

$\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_1 = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{M}_1 = 180^0$

$\Leftrightarrow \hat{M}_1 = 90^0 \Leftrightarrow AH \perp BC$.

Vậy, AM là đường trung trực của BC.

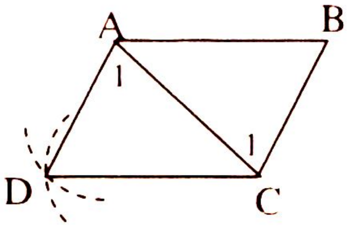
☞ ***Nhận xét***: Cũng từ kết quả ΔABM = ΔACM, ta suy ra được:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

Như vậy, trong ΔABC có AB = AC (ΔABC cân tại A) thì AM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao, vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác – *Đây chính là tính chất cơ bản của tam giác cân.*

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC. *Vẽ cung tròn tâm* A *bán kính* BC, *vẽ cung tròn tâm* C *bán kính* BA, *chúng cắt nhau tại* D (D *và* B *nằm khác phía đối với* AC). *Chứng minh rằng* AD // BC.

✍ *Giải*



Từ cách vẽ, ta nhận được:

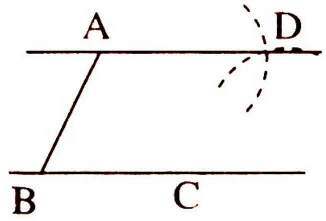
AD = BC, CD = AB.

Xét hai tam giác ΔABC và ΔCDA, ta có:

AB = CD, BC = DA, AC chung $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow$ AD // BC, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

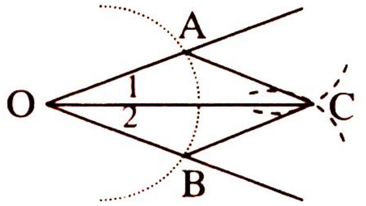
☞ ***Chú ý***: Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp "*Dựng đường thẳng a đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước ($A \notin d$)*". Thật vậy:



- Lấy hai điểm B, C trên đường thẳng d.
- Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC, vẽ cung tròn tâm C bán kính BA, chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC).
- Khi đó, a chính là đường thẳng đi qua hai điểm A và D.

Ví dụ 3: (Bài 20/tr 115 – Sgk): *Cho góc* $\widehat{xOy}$. *Vẽ cung tròn tâm* O, *cung này cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* A *và* B. *Vẽ các cung tròn tâm* A *và tâm* B *có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm* C. *Nối* O *với* C. *Chứng minh rằng* OC *là tia phân giác của góc* $\widehat{xOy}$.

✍ *Giải*



Từ cách vẽ, ta nhận được:

OA = OB, CA = CB.

Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBC, ta có:

OA = OB, CA = CB, OC chung $\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC$

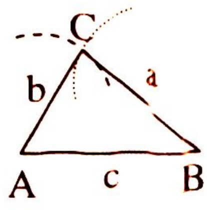
$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$ OC là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

☞ *Chú ý*: Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp "*Dựng đường phân giác của một góc*". Thật vậy, để dựng tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ ta vẽ:

- Vẽ cung tròn tâm O, cung này cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B.
- Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C.
- Nối O với C, ta được OC chính là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vấn đề 3: **VẼ ΔABC, BIẾT AB = c, BC = a, AC = b.**

Cách vẽ

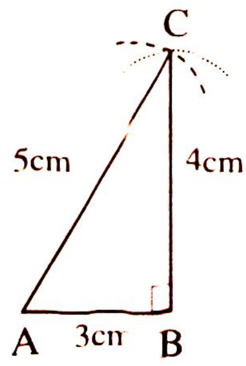


Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = c.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính b, vẽ cung tròn tâm B bán kính a. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Ví dụ 1: *Vẽ* ΔABC, *biết* AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm. *Sau đó hãy thử đo góc* $\hat{B}$.

✍ *Giải*



Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 3cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 5cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 4cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

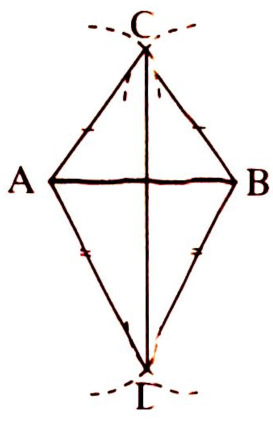
Thực hiện phép đo, ta nhận được $\hat{B} = 90^0$.

Ví dụ 2: *Cho hai tam giác* ΔABC, ΔABD, *biết* AB = 4cm, AC = BC = 3cm, AD = BD = 5cm *và* C, D *nằm khác phía đối với* AB.

a. *Hãy vẽ* ΔABC, ΔABD.

b. *Chứng minh rằng* $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt thực hiện:

Vẽ ΔABC:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 4cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 3cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 3cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Vẽ ΔABD:

- Trên nửa mặt phẳng bờ AB khác phía với C, vẽ cung tròn tâm A bán kính 5cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 5cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại D.
- Nối AD, BD, ta nhận được ΔABD thoả mãn giả thiết.

b. Xét hai tam giác ΔACD và ΔBCD, ta có:

$AC = BC$, $AD = BD$, CD chung

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, đpcm.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Vẽ ΔABC, biết:

a. AB = 6cm, BC = 8cm, CA = 10cm. Sau đó hãy thử đo góc $\hat{B}$.

b. AB = 5cm, BC = 6cm, CA = 4cm.

c. AB = AC = 6cm, BC = 8cm.

d. AB = BC = CA = 9cm. Sau đó hãy thử đo các góc.

Bài 2: Cho hai tam giác ΔABC, ΔABD, biết AB = 8cm, AC = BC = 6cm, AD = BD = 10cm và C, D nằm khác phía đối với AB.

a. Hãy vẽ ΔABC, ΔABD.

b. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Bài 3: Cho hai tam giác ΔABC, ΔABD, biết AB = 8cm, AC = BC = 4cm, AD = BD = 6cm.

a. Hãy vẽ ΔABC, ΔABD.

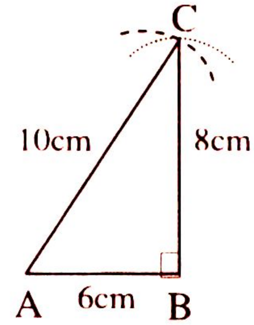
b. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Bài 4: Cho AB = 6cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2cm và đường tròn tâm B bán kính bằng 6cm, chúng cắt nhau tại C và D. Chứng minh rằng AB là tia phân gíc của góc $\widehat{CAD}$.

Bài 5: Cho ΔABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:



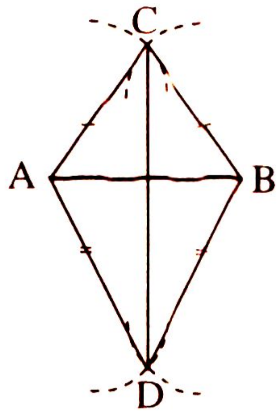
a. Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 6cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 10cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 8cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.

- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được $\hat{B} = 90^0$.

Bài 2:



a. Ta lần lượt thực hiện:

Vẽ ΔABC:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 8cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 6cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 6cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Vẽ ΔABD:

- Trên nửa mặt phẳng bờ AB khác phía với C, vẽ cung tròn tâm A bán kính 10cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 10cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại D.
- Nối AD, BD, ta nhận được ΔABD thoả mãn giả thiết.

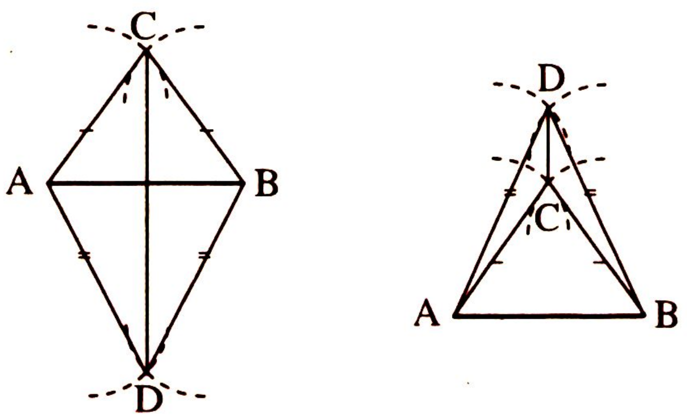
b. Xét hai tam giác ΔACD và ΔBCD, ta có:

AC = BC, AD = BD, CD chung

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, đpcm.

Bài 3:

a. Ta có hai trường hợp hình:



b. Xét hai tam giác ΔACD và ΔBCD, ta có:

AC = BC, AD = BD, CD chung

$\Rightarrow \Delta ACD$ và $\Delta BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 4

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH – GÓC – CẠNH

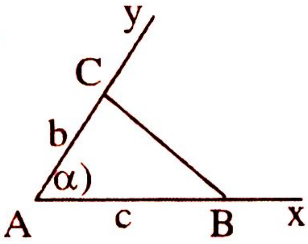
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VẼ TAM GIÁC BIẾT HAI CẠNH VÀ GÓC XEN GIỮA

Bài toán: *Vẽ ΔABC, biết $AB = c$, $AC = b$ và $BA = \alpha$.*

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ góc $\widehat{xAy} = \alpha$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = c$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = b$.
- Nối BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH

Định lí: Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

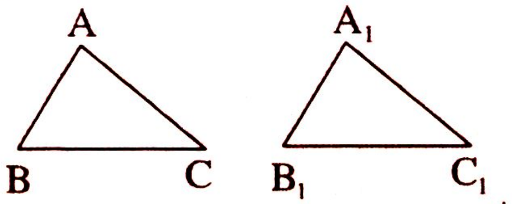
Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $\hat{A} = \hat{A}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

và khi đó ta có ngay:

$\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$ và $BC = B_1C_1$.



Hệ quả: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

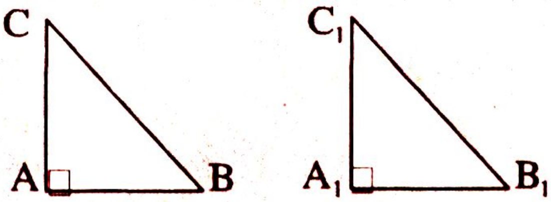
Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1 thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

và khi đó ta có ngay:

$\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$ và $BC = B_1C_1$.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Ví dụ 1: *Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Chứng minh rằng:*

a. $\Delta OAD = \Delta OBC$. b. $AC \parallel BD$.

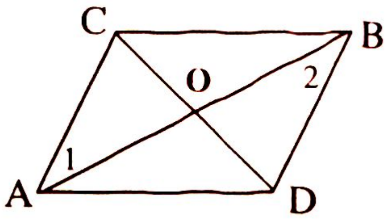
✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOBC, chúng có:

OA = OB, vì O là trung điểm AB

$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ vì đối đỉnh

OD = OC, vì O là trung điểm CD



suy ra:

ΔOAD = ΔOBC (c.g.c).

b. Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBD, chúng có:

OA = OB, vì O là trung điểm AB

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ vì đối đỉnh

OC = OD, vì O là trung điểm CD

suy ra:

ΔOAC = ΔOBD (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow$ AC // BD, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Ví dụ 2: *Trên đường trung trực* d *của đoạn* AB *lấy điểm* C *bất lỳ.*

a. *Chứng minh rằng* ΔHAC = ΔHBC, *từ đó suy ra* CA = CB.

b. *Chứng minh rằng đường thẳng* d *là phân giác của góc* $\hat{ACB}$.

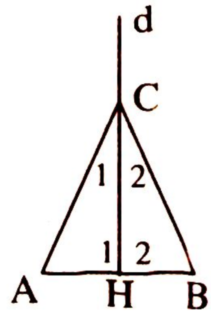
✍ *Giải*

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0$.

Xét hai tam giác vuông ΔHAC và ΔHBC, chúng có:

HA = HB

CH chung



suy ra ΔHAC = ΔHBC.

a. Từ kết quả trên ta có ngay CA = CB, đpcm.

b. Từ kết quả trên ta có ngay:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow$ d là phân giác của góc $\widehat{ACB}$, đpcm.

☛ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận kết quả:

"*Tập hợp các điểm cách đều hai điểm* A, B *cho trước là đường trung trực của* AB ".

Vấn đề 2: SỬ DỤNG HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, *đường cao* AH. *Trên tia đối của tia* HA, *lấy điểm* D *sao cho* HA = HD. *Tính số đo của góc* $\widehat{BDC}$.

✍ *Giải*

Từ giả thiết, suy ra BC là đường trung trực của AD nên:

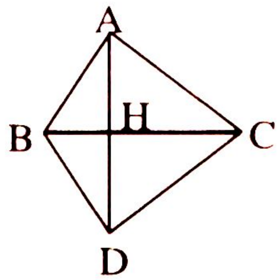
BA = BD và CA = CD.

Xét hai tam giác ΔABC và ΔDBC, chúng có:

BA = BD

CA = CD

BC chung



suy ra:

$\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \hat{A} = 80^0$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{BDC} = 80^0$.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* $\hat{A} = \alpha$, BC > AB. *Trên cạnh* BC *lấy điểm* E *sao cho* BE = AB. *Tia phân giác của góc* B *cắt* AC *tại* D.

a. *So sánh độ dài* AD *và* ED.   b. *Tính số đo của góc* $\widehat{BED}$.

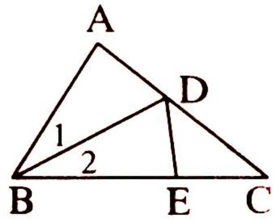
Giải

Xét hai tam giác ΔBAD và ΔBED, chúng có:

BA = BE, giả thiết

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, vì BD là phân giác của góc $\hat{B}$

BD chung



suy ra:

$\Delta BAD = \Delta BED$ (c.g.c) $\Rightarrow$ AD = ED và $\widehat{BED} = \hat{A} = \alpha$.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC, *trung tuyến* AM. *Trên tia* AM *lấy điểm* D *sao cho* AD = 2AM. *Chứng minh rằng*:

a. AB // CD.   b. AC // BD.

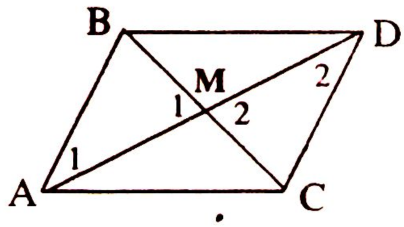
Giải

a. Xét hai tam giác ΔMAB và ΔMDC, chúng có:

MB = MC, vì M là trung điểm BC

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

MA = MD, vì AD = 2AM



suy ra:

$\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_2$

$\Leftrightarrow$ AB // CD, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

b. Chứng minh AC // BD — *Học sinh tự làm.*

☛ ***Nhận xét***: Qua hai ví dụ trên, chúng ta đã xét những trường hợp thấy ngay được sự bằng nhau của cặp góc xen giữa, tuy nhiên, trong nhiều trường hợp để có được điều này cần sử dụng một vài phép biến đổi góc. Ví dụ sau sẽ minh hoạ cho trường hợp này.

Ví dụ 4: *Cho ΔABC. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB (D, C khác phía đối với AB), vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AC (E, B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng:*

a. CD = BE. b. CD ⊥ BE.

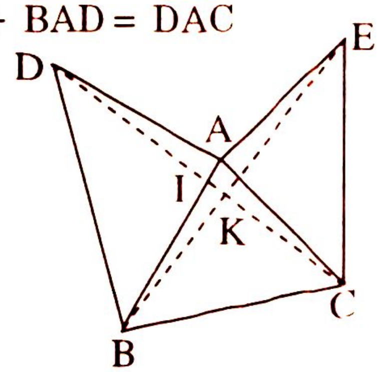
Giải

a. Xét hai tam giác ΔABE và ΔADC, chúng có:

AB = AD, giả thiết

$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^0 = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$

AE = AC, giả thiết



suy ra:

ΔABE = ΔADC ⇒ BE = CD, đpcm.

b. Giả sử CD cắt AB, BE theo thứ tự tại I, K.

Theo kết quả câu a), ta có $\widehat{ADI} = \widehat{IBK}$.

Trong Δ BIK, ta có:

$\widehat{IKB} = 180^0 - \widehat{IBK} - \widehat{KIB} = 180^0 - \widehat{ADI} - \widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^0$

⇔ CD ⊥ BE, đpcm.

Ví dụ 5: *Cho ΔABC, gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AC, AB. Trên tia BD lấy điểm M sao cho BM = 2BD, trên tia CE lấy điểm N sao cho E là trung điểm của CN. Chứng minh rằng MN = 2BC.*

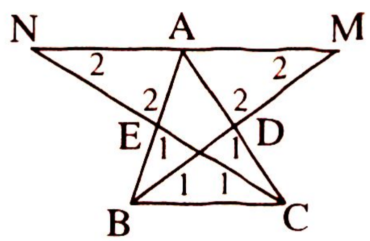
Giải

Xét hai tam giác ΔDAM và ΔDCB, chúng có:

BD = MD, vì BM = 2BD

$\hat{D}_2 = \hat{D}_1$, vì đối đỉnh

DA = DC, vì D là trung điểm của AC



suy ra:

ΔDAM = ΔDCB

từ đây, ta nhận được:

- AM = BC. (1)
- $\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ ⇔ AM // BC, vì có hai góc so le trong bằng nhau. (2)

Xét hai tam giác ΔEAN và ΔEBC, chúng có:

NE = CE, vì E là trung điểm của CN

$\hat{E}_2 = \hat{E}_1$, vì đối đỉnh

EA = EB, vì E là trung điểm của AB

suy ra:

ΔEAN = ΔEBC

từ đây, ta nhận được:

- $AN = BC$. (3)
- $\hat{C}_1 = \hat{N}_2 \Leftrightarrow AN // BC$, vì có hai góc so le trong bằng nhau. (4)

Từ (2) và (4) suy ra:

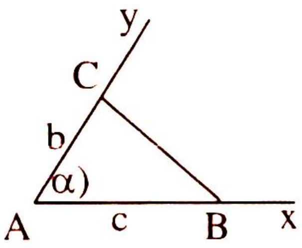
Ba điểm M, A, N thẳng hàng theo thứ tự đó

$\Leftrightarrow MN = MA + AN = BC + BC = 2BC$, đpcm.

Vấn đề 3: VẼ ΔABC, BIẾT $AB = c$, $AC = b$ VÀ $\widehat{BAC} = \alpha$

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:

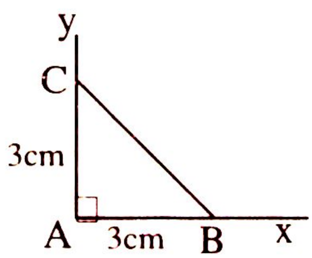


- Vẽ góc $\widehat{xAy} = \alpha$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = c$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = b$.
- Nối BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Ví dụ 1: (Bài 24/tr 118 – Sgk): *Vẽ* ΔABC, *biết* $AB = AC = 3cm$, $\hat{A} = 90^0$. *Sau đó hãy thử đo góc* $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^0$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3cm$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 3cm$.
- Nối BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy chứng minh rằng với ΔABC có giả thiết như trên thì $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Vẽ ΔABC, biết:

a. $AB = AC = 8cm$, $\hat{A} = 90^0$. Sau đó hãy thử đo góc $\hat{B}$, $\hat{C}$.

b. $AB = 3cm$, $AC = 6cm$ và $\hat{A} = 60^0$.

c. $AB = 6cm$, $AC = 8cm$ và $\hat{A} = 90^0$.

d. $AB = AC = 4cm$ và $\hat{A} = 120^0$.

Bài 2: Cho ΔABC, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA, lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Tính số đo của góc $\widehat{BDC}$, biết:

a. $\hat{A} = 60^0$.   b. $\hat{A} = 90^0$.

Bài 3: Qua trung điểm M của đoạn thẳng AB, kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. Lấy điểm C trên d. Chứng minh rằng CM là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

Bài 4: Cho ΔABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. Chứng minh rằng:

a. $DB = DC$. b. $AD \perp BC$.

Bài 5: Cho ΔABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $AB = CK$. Tia phân giác của góc $\hat{B}$ cắt AC tại D, trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho $AC = BE$. Chứng minh rằng $AK = AE$.

Bài 6: Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$. Tính số đo của góc $\widehat{CDE}$.

Bài 7: Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^0$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = AB$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

a. So sánh độ dài AD và ED. b. Tính số đo của góc $\widehat{BED}$.

Bài 8: Cho ΔABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Các đường trung trực của AC và BD cắt nhau tại O. Chứng minh rằng:

a. $\Delta OAB = \Delta OCD$. b. AO là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

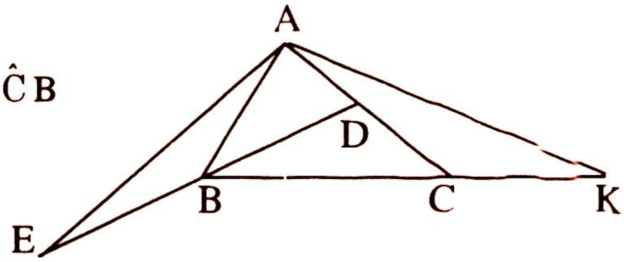
Bài 2: a). $\widehat{BDC} = 60^0$; b). $\widehat{BDC} = 90^0$.

Bài 5: Xét hai tam giác ΔABE và ΔKCA, chúng có:

$AB = KC$, giả thiết

$$\widehat{ABE} = 180^9 - \widehat{ABD} = 180^9 - \frac{1}{2}\hat{B} = 180^9 - A\hat{C}B = \widehat{KCA}$$

$BE = CA$, giả thiết



suy ra:

$\Delta ABE = \Delta KCA \Rightarrow AK = AE$, đpcm.

Bài 6: $\widehat{CDE} = 80^0$.

Bài 7: $AD = ED$ và $\widehat{BED} = 90^0$.

Bài 8: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Xét hai tam giác ΔOAB và ΔOCD, chúng có:

$OA = OC$, vì O thuộc đường trung trực của AC

$AB = CD$, giả thiết

$OB = OD$, vì O thuộc đường trung trực của BD

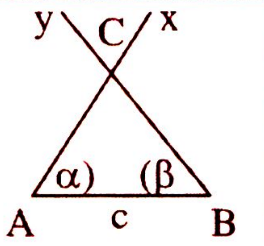
suy ra:

ΔOAB và ΔOCD (c.c.c).

CHỦ ĐỀ 5

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GÓC – CẠNH – GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT



1. VẼ TAM GIÁC BIẾT CẠNH VÀ HAI GÓC KỀ

Bài toán: *Vẽ ΔABC, biết* $AB = c$, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$.

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax và By sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$, $A\hat{B}y = \beta$. Hai tia này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC – CẠNH – GÓC

Định lí: Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

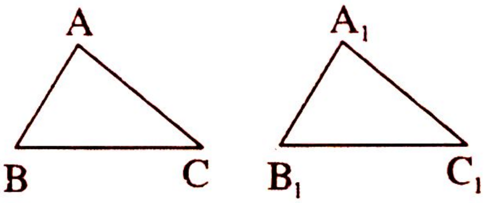
Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $\hat{A} = \hat{A}_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

và khi đó ta có ngay:

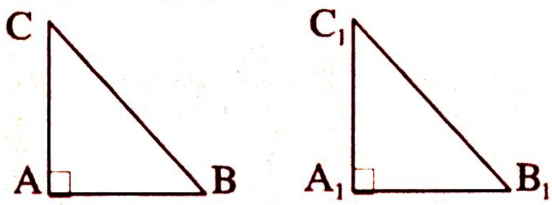
$\hat{C}_1 = \hat{C}$, $AC = A_1C_1$ và $BC = B_1C_1$.



Hệ quả:

1. Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
2. Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1.



Trường hợp 1: Nếu ta có:

$AB = A_1B_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 2: Nếu ta có:

$AB = A_1B_1$ và $\hat{C} = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 3: Nếu ta có:

$BC = B_1C_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 4: Nếu ta có:

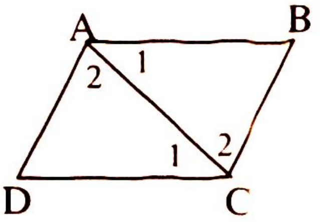
$BC = B_1C_1$ và $\hat{C} = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Ví dụ 1: (Bài 38/tr 124 – Sgk): *Cho hình vẽ, ở đó* AB // CD *và* AD // BC *Chứng minh rằng* ΔCDA = ΔABC, *từ đó suy ra* AB = CD và AD = BC.

✍ *Giải*



Xét hai tam giác ΔABC và ΔCDA, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$, vì AB // CD

AC chung

$\hat{A}_2 = \hat{C}_2$, vì AD // BC

suy ra:

ΔCDA = ΔABC (g.c.g) ⇒ AB = CD và AD = BC, đpcm.

Ví dụ 2: *Cho góc* $\widehat{xOy}$. *Lấy các điểm* A, B *theo thứ tự thuộc* Ox *và* Oy *sao cho* OA = OB. *Vẽ* AH *vuông góc với* Oy (H ∈ Oy), *vẽ* BK *vuông góc với* Ox (K ∈ Ox). *Gọi* M *là giao điểm của* AH *và* BK.

a. *Chứng minh rằng* ΔOAH = ΔOBK, *từ đó suy ra* OH = OK.

b. *Chứng minh rằng* OM *là tia phân giác của góc* $\widehat{xOy}$.

✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác vuông ΔOAH và ΔOBK, ta có:

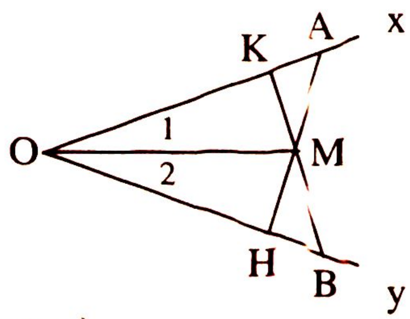
OA = OB, giả thiết

Ô chung

suy ra:

ΔOAH = ΔOBK (cạnh huyền và góc nhọn)

⇒ OH = OK.



b. Xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, ta có:

OM chung

OH = OK

suy ra:

ΔOMH = ΔOMK (cạnh huyền và cạnh góc vuông)

⇒ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ⇔ OM là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GIẢI TOÁN.

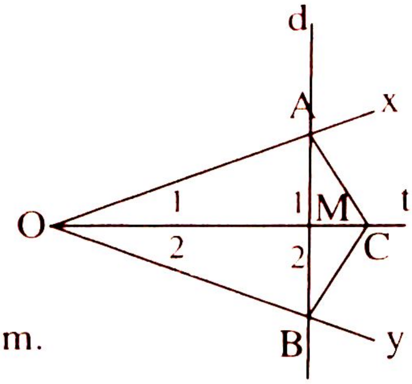
Ví dụ 1: (Bài 35/tr 123 – Sgk): *Cho góc* $\widehat{xOy}$. *Vẽ tia phân giác* Ot *của góc* $\widehat{xOy}$, *trên* Ot *lấy điểm* M. *Đường thẳng* d *qua* M *và vuông góc với* Ot *cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* A *và* B.

a. *Chứng minh rằng* OA = OB.

b. *Lấy điểm* C *thuộc* Ot, *chứng minh rằng* CA = CB *và* $\widehat{OAC} = \widehat{OBC}$

✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác ΔOAM và ΔOBM, ta có:



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$

OM chung

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^0$.

suy ra:

ΔOAM = ΔOBM (g.c.g) ⇒ OA = OB, đpcm.

b. Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBC, ta có:

OA = OB, theo kết quả câu a)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$

OC chung

suy ra:

ΔOAC = ΔOBC (c.g.c) ⇒ CA = CB và $O\hat{A}C = \widehat{OBC}$, đpcm.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* AB = AC. *Lấy các điểm* D, E *theo thứ tự thuộc* AB, AC *sao cho* AD = AE. *Gọi* O *là giao điểm của* BE *và* CD. *Chứng minh rằng*:

a. BE = CD.

b. ΔOBD = ΔOCE.

✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác ΔABE và ΔACD, ta có:



AB = AC, giả thiết

Â chung

AE = AD, giả thiết

suy ra:

ΔABE = ΔACD (c.g.c) ⇒ BE = CD, đpcm.

b. Xét hai tam giác ΔOBD và ΔOCE, ta có:

$\hat{B}_2 = \hat{C}_2$, theo kết quả câu a)

BD = AB − AD = AC − AE = CE, dựa theo giả thiết

$\widehat{BDO} = 180^0 - \hat{D}_2 = 180^0 - \hat{E}_2 = C\hat{E}O$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra:

ΔOBD = ΔOCE (g.c.g).

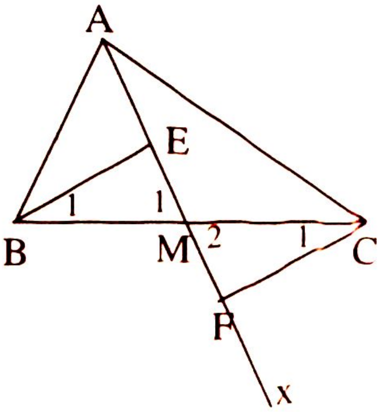
Ví dụ 3: (Bài 40/tr 124 – Sgk): *Cho* ΔABC (AB < AC), *tia* Ax *đi qua trung điểm* M *của* BC. *Kẻ* BE *và* CF *vuông góc với* Ax (E, F ∈ Ax). *Chứng minh rằng* BE = CF.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong các cách trình bày sau:

Cách 1: (*Sử dụng trường hợp bằng nhau g.c.g*): Theo giả thiết:

$$\begin{cases} BE \perp Ax \\ CF \perp Ax \end{cases} \Rightarrow BE \,//\, CF.$$



Xét hai tam giác ΔMBE và ΔMCF, ta có:

$\hat{B}_1 = \hat{C}_1$, vì BE // CF

MB = MC, vì M là trung điểm BC

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

suy ra:

ΔMBE và ΔMCF (g.c.g) ⇒ BE = CF, đpcm.

Cách 2: Sử dụng hệ quả

Xét hai tam giác vuông ΔMBE vuông tại E và ΔMCF vuông tại F, ta có:

MB = MC, vì M là trung điểm BC – Cạnh huyền

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh – Góc nhọn

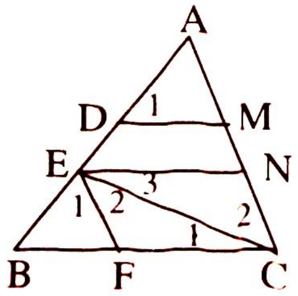
suy ra:

ΔMBE và ΔMCF (Cạnh huyền và góc nhọn)

⇒ BE = CF, đpcm.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC. *Trên cạnh* AB *lấy các điểm* D, E *sao cho* AD = BE. *Qua* D *và* E *kẻ các đường thẳng song song với* BC, *chúng cắt* AC *theo thứ tự tại* M *và* N. *Chứng minh rằng* BC = DM + EN.

✍ *Giải*



Kẻ EF // AC (F ∈ BC), nối E với C.

Xét hai tam giác ΔCEF và ΔECN, ta có:

$\hat{E}_2 = \hat{C}_2$, là hai góc so le trong của EF // AC

CE chung

$\hat{C}_1 = \hat{E}_3$, là hai góc so le trong của EN // BC

suy ra:

ΔCEF = ΔECN (g.c.g) ⇒ EN = FC. (1)

Xét hai tam giác ΔADM và ΔEBF, ta có:

$\hat{A} = \hat{E}_1$, là hai góc đồng vị của EF // AC

AD = BE, giả thiết

$\hat{D}_1 = \hat{B}$, là hai góc đồng vị của DM // BC

suy ra:

ΔADM = ΔEBF (g.c.g) ⇒ DM = BF. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được EN + DM = FC + BF = BC, đpcm.

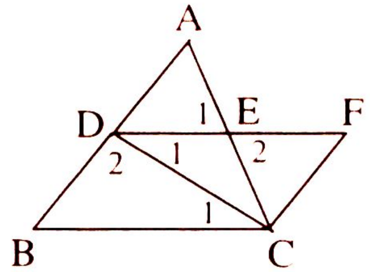
Ví dụ 5: *Cho* ΔABC, *gọi* D, E *theo thứ tự là trung điểm của* AB, AC. *Trên tia* DE *lấy điểm* F *sao cho* DE = EF. *Chứng minh rằng:*

a. BD = CF.

b. $\Delta BCD = \Delta FDC$.

c. $DE = \frac{1}{2} BC$ (*đọc là* DE *song song và bằng một phần hai* BC).

✍ *Giải*



a. Xét hai tam giác ΔADE và ΔCFE, ta có:

AE = CE, vì E là trung điểm AC

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, vì đối đỉnh

DE = FE, vì E là trung điểm DF

suy ra:

$\Delta ADE = \Delta CFE$ (c.g.c) $\Rightarrow$ CF = AD = BD, vì D là trung điểm AC

b. Từ kết quả câu a), suy ra:

$\widehat{ADE} = \widehat{EFC} \Rightarrow AB // CF$.

Xét hai tam giác ΔBCD và ΔFDC, ta có:

BD = FC, theo kết quả câu a)

$\hat{D}_2 = \widehat{DCF}$, là hai góc so le trong của AB // CF

CD chung

suy ra:

$\Delta BCD = \Delta FDC$ (c.g.c)

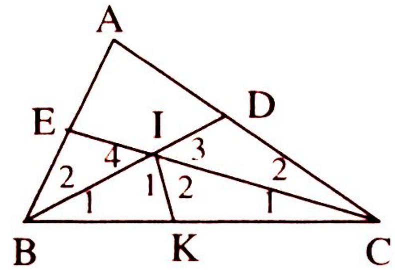
c. Từ kết quả câu b), suy ra:

$\hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow DE // BC$.

$DE = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} BC$.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC *có* $\hat{A} = 60^0$. *Các phân giác* BD *và* CE *cắt nhau tại điểm* I. *Chứng minh rằng* ID = IE.

✍ *Giải*



Từ giả thiết về các phân giác BD và CE, ta được:

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_1 = C_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$.

suy ra:

$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})] = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = \frac{1}{2}(180^0 - 60^0) = 60^0$.

$\Rightarrow \hat{I}_3 = \hat{I}_4 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 60^0$.

Trong ΔIBC kẻ phân giác IK, ta nhận thấy:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{I}_3) = \frac{1}{2}(180^0 - 60^0) = 60^0.$$

Xét hai tam giác ΔICD và ΔICK, ta có:

$\hat{I}_3 = \hat{I}_2 = 60^0$

IC chung

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$

suy ra:

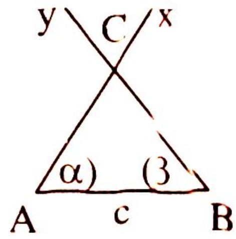
ΔICD = ΔICK (g.c.g) ⇒ ID = IK. (1)

Chứng minh tương tự, ta nhận được IE = IK. (2)

Từ (1), (2) suy ra ID = IE.

Vấn đề 3: VẼ ΔABC, BIẾT AB = c, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$

Cách vẽ

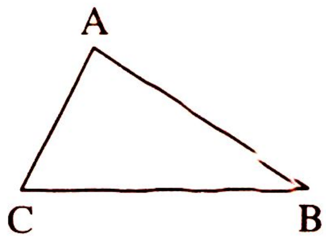


Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = c
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax và By sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$, $\widehat{ABy} = \beta$. Hai tia này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Ví dụ 1: *Vẽ* ΔABC, *biết* BC = 6cm, $\hat{B} = 30^0$, $\hat{C} = 60^0$. *Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh* AC *và đưa ra nhận xét.*

✍ *Giải*



Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng BC = 6cm
- Trên nửa mặt phẳng bờ BC, vẽ hai tia Bx và Cy sao cho $\widehat{xBC} = 30^0$, $\widehat{yCB} = 60^0$. Hai tia này cắt nhau tại A.
- Nối AC, AB, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được AC = 3cm.

Nhận xét: Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng một nửa cạnh huyền.

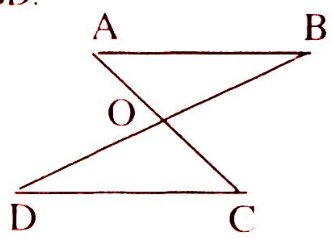
C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Vẽ ΔABC, biết:

a. AB = 6cm, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 30^0$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC và đưa ra nhận xét.

b. AB = $8\sqrt{2}$ cm, $\hat{A} = \hat{B} = 45^0$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC, BC và đưa ra nhận xét.

Bài 2: Cho hình vẽ, ở đó AB // CD và AB = CD. Chứng minh rằng O là trung điểm của mỗi đoạn thẳng AC và BD.



Bài 3: Cho đoạn thẳng AB. Qua A, B vẽ hai đường thẳng a, b vuông góc với AB. Đường thẳng qua trung điểm O của AB cắt a, b theo thứ tự tại A_1, B_1. Hãy so sánh các độ dài AA_1 và BB_1.

Bài 4: Cho ΔABC. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại I. Vẽ $IM \perp AB$ ($M \in AB$), $IN \perp BC$ ($N \in BC$), $IP \perp AC$ ($P \in AC$). Chứng minh rằng IM = IN = IP.

Bài 5: Cho ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$. Tia phân giác góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. Chứng minh rằng AB = AC và DA = DB.

Bài 6: Cho ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E, tia phân giác của góc C cắt AB tại F. Chứng minh rằng BF = CE và BE = CF.

Bài 7: Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng AB = BE.

Bài 8: Cho ΔABC có AB = 5cm, BC = 6cm, AC = 8cm. Qua các điểm A, B, C kẻ các đường thẳng a, b, c theo thứ tự song song với BC, AC, AB. Giả sử a cắt b, c theo thứ tự tại E, F. Giả sử b cắt c tại D. Tính chu vi của các tam giác ΔABC, ΔABE, ΔBCD, ΔACF, ΔDEF.

Bài 9: Cho góc $\widehat{xOy}$. Lấy các điểm A, B thuộc Ox sao cho OA > OB. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA và OD = OB. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a. AD = BC.

b. $\Delta ABE = \Delta CDE$.

c. OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Bài 10: Cho ΔABC, gọi D là trung điểm AB. Đường thẳng qua D song song với BC cắt AC tại E, đường thẳng qua E song song với AB cắt BC tại F. Chứng minh rằng :

a. AD = EF.

b. $\Delta ADE = \Delta EFC$.

c. AE = EC.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 2: Xét hai tam giác ΔOAB và ΔOCD, ta có:

. $\hat{A} = \hat{C}$, vì là hai góc so le trong của AB // CD

AB = CD, giả thiết

$\hat{B} = \hat{D}$, vì là hai góc so le trong của AB // CD

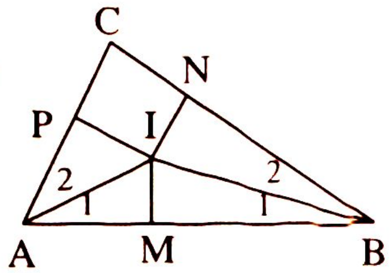
suy ra:

$\Delta OAB = \Delta OCD$ (g.c.g) $\Rightarrow$ OA = OC và OB = OD

$\Leftrightarrow$ O là trung điểm của mỗi đường.

Bài 3: $AA_1 = BB_1$ do $\Delta OAA_1 = \Delta OBB_1$ (g.c.g).

Bài 4: Ta lần lượt xét:



- Xét hai tam giác vuông ΔIBM vuông tại M và ΔIBN vuông tại N, ta có:

  IB chung

  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, vì BI là tia phân giác

suy ra:

ΔIBM = ΔIBN (cạnh huyền và góc nhọn) ⇒ IM = IN. (1)

- Xét hai tam giác vuông ΔIAM vuông tại M và ΔIAP vuông tại P, ta có:

  IA chung

  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AI là tia phân giác

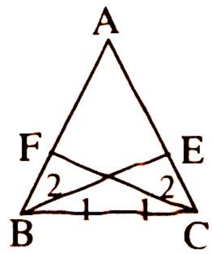
suy ra:

ΔIAM = ΔIAP (cạnh huyền và góc nhọn) ⇒ IM = IP. (2)

Từ (1), (2) suy ra IM = IN = IP, đpcm.

Bài 5: Lời giải trong chủ đề tam giác cân.

Bài 6: Xét hai tam giác ΔBCF và ΔCBE, ta có:



$\hat{B} = \hat{C}$, giả thiết

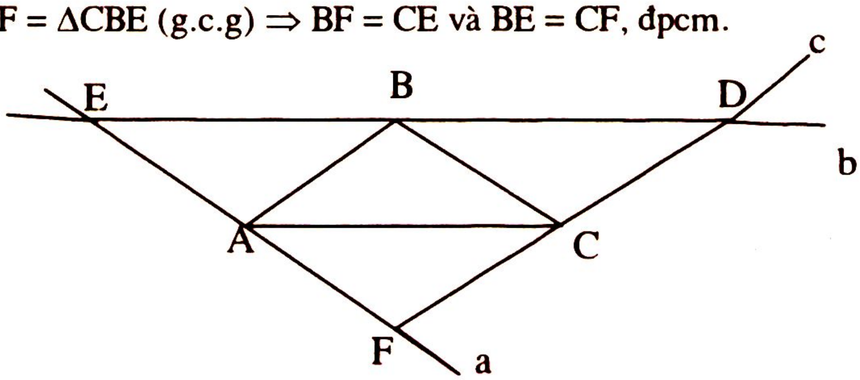
BC chung

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B} = \hat{B}_1$$

suy ra:

ΔBCF = ΔCBE (g.c.g) ⇒ BF = CE và BE = CF, đpcm.

Bài 8:



Dựa trên sự bằng nhau trong trường hợp g.c.g ta suy ra được ngay các tam giác ΔABC, ΔABE, ΔBCD, ΔACF bằng nhau, do đó:

$$CV_{\Delta ABC} = CV_{\Delta ABE} = CV_{\Delta BCD} = CV_{\Delta ACF} = AB + BC + AC$$
$$= 5 + 6 + 8 = 19cm.$$

Trong ΔDEF, ta có:

DE = DB + BE = AC + AC = 2AC = 2.8 = 16cm

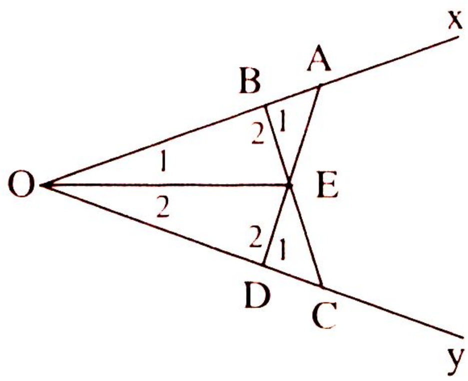
EF = EA + AF = BC + BC = 2BC = 2.6 = 12cm

DF = DC + CF = AB + AB = 2AB = 2.5 = 10cm

suy ra:

$$CV_{\Delta DEF} = DE = EF + DF = 16 + 12 + 10 = 38cm.$$

Bài 9:



a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:

$OA = OC$, giả thiết

$\hat{O}$ chung

$OD = OB$, giả thiết

suy ra:

$\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$.

b. Xét hai tam giác ΔABE và ΔCDE, ta có:

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

$AB = OA - OB = OC - OD = CD$, dựa theo giả thiết

$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - \hat{D}_2 = \hat{D}_1$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra:

$\Delta ABE = \Delta CDE$ (g.c.g)

c. Xét hai tam giác ΔAOE và ΔCOE, ta có:

$OA = OC$, giả thiết

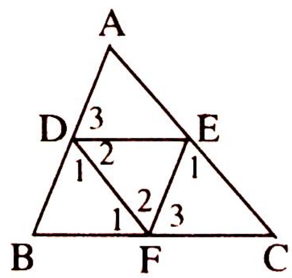
$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

$AE = CE$, theo kết quả câu b)

suy ra:

ΔAOE và ΔCOE (c.g.c) $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow OE$ là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Bài 10:



a. Nối D với F. Xét hai tam giác ΔBDF và ΔEFD, ta có:

$\hat{D}_1 = \hat{F}_2$, vì là hai góc so le trong của $AB // EF$

DF chung

$\hat{F}_1 = \hat{D}_2$, vì là hai góc so le trong của $DE // BC$

suy ra:

$\Delta BDF = \Delta EFD$ (g.c.g)

$\Rightarrow EF = BD = AD$, do D là trung điểm AB

b. Xét hai tam giác ΔADE và ΔEFC, ta có:

$\hat{A} = \hat{E}_1$, vì là hai góc đồng vị của $AB // EF$

$AD = EF$, theo kết quả câu a)

$\hat{F}_3 = \hat{B} = \hat{D}_3$, vì là hai góc đồng vị của $AB // EF$ tiếp tới là hai góc đồng vị của $BC // DE$

suy ra:

$\Delta ADE = \Delta EFC$ (g.c.g).

c. Theo kết quả câu b) suy ra $AE = EC$.

CHỦ ĐỀ 6

TAM GIÁC CÂN

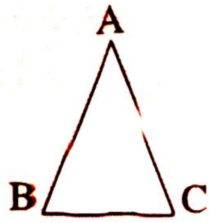
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Tam giác cân* là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Với ΔABC cân tại A, ta nói:

- AB, AC gọi là hai *cạnh bên* (AB = AC) và BC là *cạnh đáy*.
- Các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ là hai *góc ở đáy* và $\hat{A}$ là *góc ở đỉnh*.



2. TÍNH CHẤT

Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

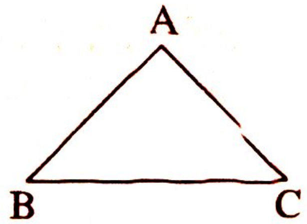
Định nghĩa: *Tam giác vuông cân* là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

Như vậy, với ΔABC vuông cân tại A, ta có:

$AB = AC$,

$\hat{A} = 90^0$,

$\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.



3. TAM GIÁC ĐỀU

Định nghĩa: *Tam giác đều* là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

Ta có được các kết quả sau:

1. Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60^0.
2. Một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
3. Một tam giác cân có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

Ví dụ 1: *Cho ΔABC đều. Chứng minh rằng* $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

✍ *Giải*

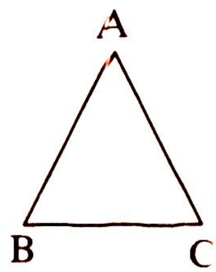
Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Dựa trên tính chất của tam giác cân

Vì ΔABC đều nên ta lần lượt có:

$BC = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $C \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$.

$AB = BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $B \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{C}$.



Mặt khác, ta lại có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow 3\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Cách 2: Trình bày theo sự tương ứng đỉnh của các tam giác bằng nhau

Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ACB$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

$\Delta ACB = \Delta BCA$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow 3\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Ví dụ 2: *Cho ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.*

Giải

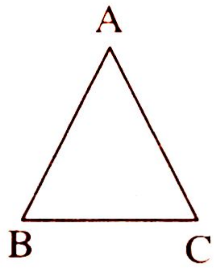
Từ giả thiết ta lần lượt có:

$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C $\Leftrightarrow$ CA = CB.

$\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Leftrightarrow$ AB = AC.

Từ đó, suy ra:

AB = BC = CA $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.



Nhận xét: Trong trường hợp ΔABC cân tại A có một góc bằng 60^0 thì nó cũng là tam giác đều, bởi:

Nếu $\hat{A} = 60^0$ thì:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^0 - 60^0 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} = 60^0$$

$\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Ví dụ 3: *Cho ΔABC. Chứng minh rằng:*

a. *Nếu ΔABC cân tại A thì $\hat{B} = \hat{C}$.*

b. *Nếu $\hat{B} = \hat{C}$ thì ΔABC cân tại A.*

Giải

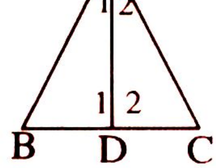
a. Dựng tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC ở D.

Xét hai tam giác ΔADB và ΔADC, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AD là đường phân giác góc $\hat{A}$

AD chung



Suy ra:

$\Delta ADB = \Delta ADC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$.

b. Vẽ tia phân giác góc $\hat{A}$, cắt BC tại D.

Xét hai tam giác ΔADB và ΔADC, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AD là đường phân giác góc $\hat{A}$

AD chung

$\hat{D}_1 = 180^0 - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^0 - \hat{A}_2 - \hat{C} = \hat{D}_2$

Suy ra:

$$\Delta ADB = \Delta ADC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân .}$$

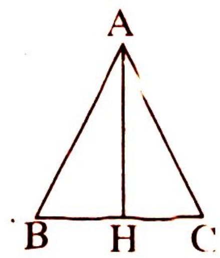
Ví dụ 4: *Cho ΔABC. Chứng minh rằng:*

a. *Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì ΔABC cân tại A.*

b. *Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.*

✍ *Giải*

a. Trong ΔABC, ta có:



- Vì AH là đường cao nên:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0.$$

- Vì AH là trung tuyến nên:

$$HB = HC.$$

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

HB = HC

$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$

AH chung

suy ra:

$$\Delta AHB = \Delta AHC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

b. Ta có nhận xét:

- Vì ΔABC cân tại A nên:

$$AB = AC \text{ và } \hat{B} = \hat{C}.$$

- Vì AH là trung tuyến nên:

$$HB = HC.$$

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

AB = AC

$\hat{B} = \hat{C}$

HB = HC

suy ra:

$$\Delta AHB = \Delta AHC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2.$$

Mặt khác:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{H}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0 \Leftrightarrow \text{AH là đường cao.}$$

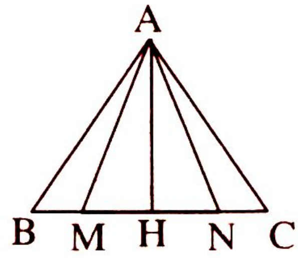
☞ *Chú ý:*

1. Từ đây, chúng ta có thêm được một tính chất là " *Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân* ".
2. Các em học sinh hãy chứng minh thêm các tính chất:
   - *Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.*
   - *Nếu một tam giác có đường phân giác đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.*
   - *Trong tam giác cân hai phân giác (đường cao, trung tuyến) ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.* Hãy thử xem điều ngược lại có đúng không ?
   - *Nếu ΔABC cân tại A thì* $\hat{B} < 90^0$ – Hãy thử nêu ý nghĩa của tính chất này.

Vấn đề 2: CHỨNG MINH MỘT TAM GIÁC LÀ TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Trên cạnh* BC *lấy các điểm* M, N *sao cho* BM = CN. *Chứng minh rằng* ΔAMN *là tam giác cân.*

✍ *Giải*



Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa.

Vì ΔABC cân tại A nên:

$AB = AC$ và $\hat{B} = \hat{C}$.

Khi đó, xét hai tam giác ΔABM và ΔCAN, ta có:

$AB = AC$

$\hat{B} = \hat{C}$

BM = CN, giả thiết

suy ra:

ΔABM và ΔCAN ⇒ AM = AN ⇔ ΔAMN cân tại A.

Cách 2: Sử dụng tính chất.

Gọi AH là đường cao của ΔABC, suy ra HB = HC.

Từ giả thiết BM = CN suy ra HM = HN.

Khi đó, ΔAMN có đường cao AH cũng là trung tuyến do đó nó là tam giác cân.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *vuông cân tại* A. *Vẽ đường thẳng a qua điểm* A *sao cho* B *và* C *thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ* a. *Vẽ* BH, CK *vuông góc với* a (H, K ∈ a). *Gọi* M *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng*:

a. AH = CK.

b. HK = BH + CK.

c. ΔMHK *vuông cân.*

✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔCKA, ta có:

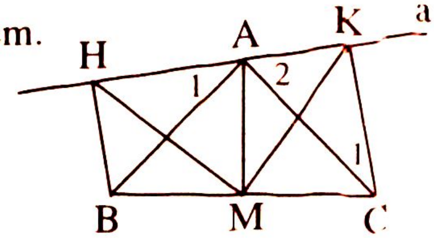
AB = AC, giả thiết

$\hat{A}_1 = 180^0 - \widehat{BAC} - \hat{A}_2 = 180^0 - 90^0 - (90^0 - \hat{C}_1) = \hat{C}_1$

suy ra:

ΔAHB = ΔCKA (cạnh huyền và góc nhọn)

$\Rightarrow \widehat{HBA} = \hat{A}_2$, BH = AK và AH = CK, đpcm.



b. Ta có ngay:

HK = AK + AH = BH + CK, đpcm.

c. Xét hai tam giác ΔMHB và ΔMKA, ta có:

BH = AK, theo kết quả a)

$\widehat{HBM} = \widehat{HBA} + \widehat{ABM} = \hat{A}_2 + 45^0 = K\hat{A}M$

$MB = \frac{1}{2}BC = MA$, trung tuyến thuộc cạnh huyền

suy ra:

ΔMHB và ΔMKA (c.g.c)

từ đó:

MH = MK ⇒ ΔMHK cân.

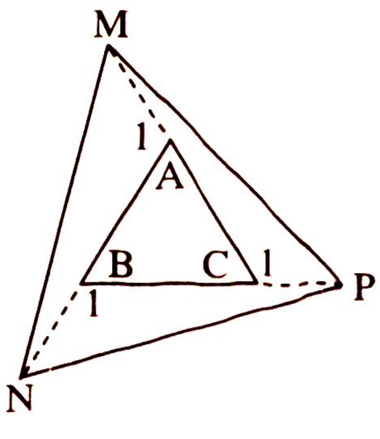
$\widehat{BMH} = \widehat{AMK}$

$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HMA} + \widehat{AMK} = \widehat{HMA} + \widehat{BMH} = \widehat{BMA} = 90^0$.

Vậy, ΔMHK vuông cân.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *đều. Lấy các điểm* M, N, P *theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia* AC, BA, CB, *sao cho* AM = BN = CP. *Chứng minh rằng* ΔMNP *là tam giác đều.*

✍ *Giải*



Xét ba tam giác ΔAMN, ΔBNP, ΔCPM, ta có:

AM = BN = CP, giả thiết

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 180^0 - 60^0 = 120^0$

AN = BP = CM = AM + AC

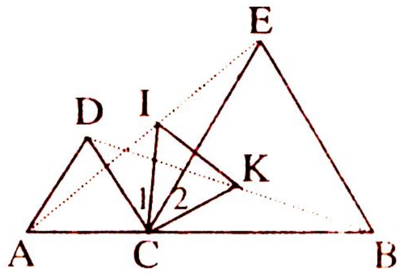
suy ra:

ΔAMN = ΔBNP = ΔCPM

⇒ MN = NP = PM ⇔ ΔMNP là tam giác đều.

Ví dụ 4: *Cho ba điểm* A, C, B *thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ* AB, *vẽ các tam giác đều* ACD, BCE. *Gọi* I, K *theo thứ tự là trung điểm của* AE *và* BD. *Chứng minh rằng* ΔCIK *là tam giác đều.*

Giải



Xét ΔACE và ΔDCB, ta có:

AC = DC, vì chúng là cạnh của tam giác đều

$\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 60^0 + \widehat{DCE}$

$= \widehat{BCE} + \widehat{DCE} = \widehat{DCB}$

CE = CB, vì chúng là cạnh của tam giác đều

suy ra:

$\Delta ACE = \Delta DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng CI = CK.

Mặt khác, ta có nhận xét:

$\widehat{DCE} = 180^0 - \widehat{ACD} - \widehat{BCE} = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$.

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

$\Rightarrow \widehat{ICK} = 60^0$.

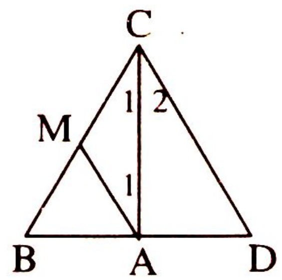
Vậy, ΔCIK là tam giác cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

Vấn đề 3: SỬ DỤNG TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU GIẢI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30^0 bằng một phần hai cạnh huyền.*

Giải

Giả sử ΔABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^0$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho AB = MB

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác cân

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

$\Leftrightarrow$ AB = BM = MA.

Trong ΔMAC, ta có:

$\hat{A}_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Leftrightarrow$ MA = MC.

Khi đó:

$BC = BM + CM = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$. đpcm.

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AB = AD.

Nhận xét rằng ΔBCD có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên:

ΔBCD là tam giác cân $\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

Khi đó:

$BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$. đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, chúng ta thu nhận được một kết quả:

> "*Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng bằng nửa cạnh huyền và ngược lại*".

Chúng ta sẽ trình bày thêm một ví dụ để minh hoạ việc sử dụng tính chất này.

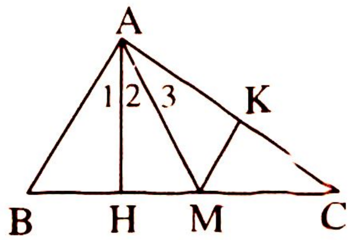
Ví dụ 2: *Cho ΔABC, có đường cao AH và trung tuyến AM chia góc thành 3 góc bằng nhau. Tính số đo các góc của ΔABC.*

✍ *Giải*

Lấy điểm K trên cạnh AC sao cho AK = AH.

Trong ΔABM có đường cao AH cũng là đường phân giác nên

ΔABM cân tại A $\Rightarrow MH = \frac{1}{2}BM$.



Xét hai tam giác ΔAHM, ΔAKM, ta có:

AH = AK

$\hat{A}_2 = \hat{A}_3$, giả thiết

AM chung

suy ra ΔAHM = ΔAKM nên:

$$\widehat{AKM} = \widehat{AHM} = 90^0 \text{ và } MK = MH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC.$$

Trong ΔKMC vuông tại K, ta có:

$$MK = \frac{1}{2}MC \Leftrightarrow \hat{C} = 30^0 \Rightarrow H\hat{A}C = 90^0 - 30^0 = 60^0 \Rightarrow \hat{A} = \frac{3}{2}H\hat{A}C = 90^0$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 90^0 - 30^0 = 60^0.$$

☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, chúng ta thu nhận được một kết quả:

> "*Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì các đường cao, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông sẽ chia góc vuông thành ba phần bằng nhau và ngược lại*".

Ví dụ 3: *Cho ΔABC cân. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết:*

a. $\hat{A} = 120^0$. b. $\hat{A} = 30^0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 120^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 120^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 240^0 > 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 60^0 = 30^0.$$

b. Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC cân tại A thì

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 15^0 = 75^0.$$

Trường hợp 2: Nếu ΔABC cân tại C thì

$$\hat{B} = \hat{A} = 30^0$$

$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0.$$

Trường hợp 3: Nếu ΔABC cân tại B thì

$$\hat{C} = \hat{A} = 30^0$$

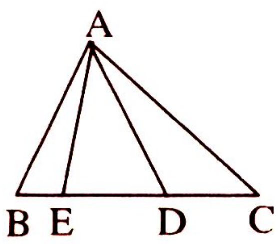
$$\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ta cần thấy rằng "*Với ΔABC cân có một góc bằng α*" ta có nhận xét:

1. Nếu $0 < \alpha < 90^0$ thì sẽ có hai trường hợp:
   Trường hợp 1: Khi α là góc ở đỉnh thì góc ở đáy bằng:
   $$90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$
   Trường hợp 2: Khi α là góc ở đáy thì góc ở đỉnh bằng:
   $$180^0 - 2\alpha.$$
2. Nếu $90^0 \le \alpha < 180^0$ thì α là góc ở đỉnh và khi đó góc ở đáy bằng $90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Lấy các điểm* D, E *thuộc cạnh* BC *sao cho* BD = BA *và* CA = CE. *Tính số đo góc* $\widehat{DAE}$, *biết* $\hat{A} = 80^0$.

✍ *Giải*



Trong ΔADE, ta có:

$$\widehat{DAE} = 180^0 - \widehat{AED} - \widehat{ADE}. \quad (1)$$

Từ giả thiết, ta lần lượt thấy:

- Vì BD = BA nên ΔABD cân tại B, do đó:
  $$\widehat{ADE} = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}. \quad (2)$$
- Vì CA = CE nên ΔACE cân tại C, do đó:
  $$\widehat{AED} = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{C}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

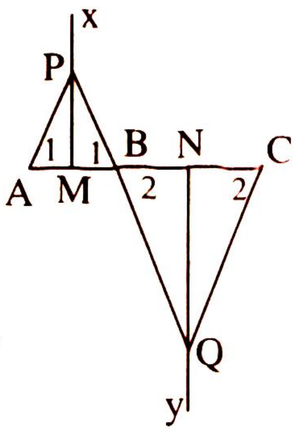
$$\widehat{DAE} = 180^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}) - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 50^0.$$

☞ ***Chú ý***: Rất nhiều học sinh mắc phải lỗi vẽ hình khi thực hiện ví dụ này và lỗi đó xuất phát từ sự tuỳ tiện về độ dài (cần nhớ rằng AB + AC > BC).

Vấn đề 4: SỬ DỤNG TAM GIÁC CÂN GIẢI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 1: *Cho ba điểm thẳng hàng* A, B, C *theo thứ tự đó. Gọi* M, N *theo thứ tự là trung điểm của* AB, BC. *Kẻ các tia* Mx, Ny *thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ* AC *sao cho* $Mx \perp AB$ *và* $Ny \perp BC$. *Một đường thẳng qua* B *cắt* Mx, Ny *theo thứ tự tại* P, Q. *Chứng minh rằng* AP // CQ.

✍ *Giải*



Nhận xét rằng:

- Vì Mx là trung trực của AB nên:

  PA = PB ⇔ ΔPAB cân tại P

  $\Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

- Vì Ny là trung trực của BC nên:

  QB = QC ⇔ ΔQBC cân tại Q ⇔ $\hat{C}_2 = \hat{B}_2$.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{B}_1 = B_2$, vì đối đỉnh

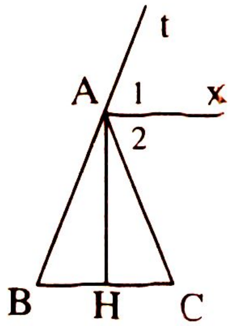
$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2$ ⇔ AP // CQ, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Gọi* Ax *là tia phân giác của góc ngoài đỉnh* A. *Chứng minh rằng* Ax // BC.

✍ *Giải*

Ta có thể trình lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: Sử dụng góc đồng vị.



Vì ΔABC cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C}$.

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ nên:

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{tAC} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{B}) = \hat{B}$$

⇒ Ax // BC vì có hai góc đồng vị bằng nhau.

Cách 2: Sử dụng góc so le trong.

Vì ΔABC cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C}$.

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ nên:

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{tAC} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{C}) = \hat{C}$$

⇒ Ax // BC vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Cách 3: Sử dụng tính chất đường cao của tam giác vuông.

Vẽ đường cao AH, suy ra;

$AH \perp BC$

AH cũng là phân giác của góc $\hat{A}$.

Ta có ngay $AH \perp Ax$ (tính chất hai đường phân giác trong và phân giác ngoài).

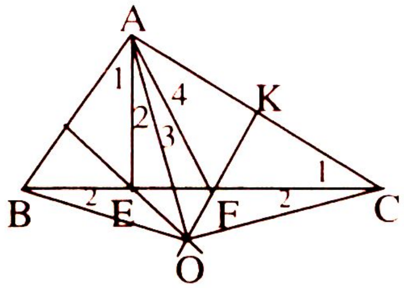
Vậy, Ax // BC vì cùng vuông góc với AH.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC. *Các đường trung trực của* AB *và* AC *cắt nhau tại* O *và* BC *theo thứ tự tại* E, F. *Chứng minh rằng:*

a. OB = OC.

b. AO *là tia phân giác của góc* $\widehat{EAF}$.

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt có:

- Vì O thuộc trung trực của AB nên:

  OA = OB. (1)

- Vì O thuộc trung trực của AC nên:

  OA = OC. (2)

Từ (1), (2) suy ra OB = OC, đpcm.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

$OB = OC \Leftrightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2$.

Tiếp theo, ta lần lượt có:

- $\Delta OAE = \Delta OBE$ vì OA = OB, EA = EB và OE chung, suy ra:

  $\hat{B}_2 = \hat{A}_2$. (3)

- $\Delta OAF = \Delta OCF$ vì OA = OC, FA = FC và OF chung, suy ra:

  $\hat{C}_2 = \hat{A}_3$. (4)

Từ (3), (4) suy ra:

$\hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Leftrightarrow$ AO là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai góc kề bù xOz và zOy. Vẽ các tia Om, On theo thứ tự là các tia phân giác của các góc xOz và zOy. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox, Oz sao cho OA = OB. AB cắt tia Om tại I. Chứng minh rằng:

a. $Om \perp On$. b. $AB \perp OI$. c. AB // On

Bài 2: Cho ΔABC cân. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết:

a. $\hat{A} = 160^0$. b. $\hat{A} = 90^0$. c. $\hat{A} = 36^0$.

Bài 3: Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tam giác cân ADC (DA = DC), với góc ở đáy bằng 15^0 vào phía trong ΔABC. Vẽ tam giác đều ΔABE ở phía ngoài ΔABC. Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

Bài 4: Cho ΔABC, phân giác AD. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AB = AE. Chứng minh rằng AD // CE.

Bài 5: Cho ΔABC có BC = 2AB. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Trên tia AD lấy điểm E sao cho AE = 2AD. Chứng minh rằng:

a. $\Delta MAE = \Delta MAC$. b. AC = 2AD.

Bài 6: Cho ΔABC cân tại A. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho AD = AE. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:

a. BE = CD. b. DE // BC. c. $\Delta OBD = \Delta OCE$.

Bài 7: Cho ΔABC cân tại A. Lấy các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho BD = BA và CA = CE. Tính số đo góc $\widehat{DAE}$, biết:

a. $\hat{A} = 120^0$. b. $\hat{A} = 90^0$. c. $\hat{A} = 60^0$.

Bài 8: Cho ΔABC đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho BC = 3BD. Vẽ DE vuông góc với BC ($E \in AB$), vẽ DF vuông góc với AC ($F \in AC$). Chứng minh rằng ΔDEF là tam giác đều.

Bài 9: Cho ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 100^0$. Trong góc C vẽ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = 30^0$, tia này cắt phân giác của góc B lại E. Vẽ tam giác đều BCD (D và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC).

a. Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc $\widehat{BDC}$.

b. Tính số đo của góc $\widehat{AEB}$.

Bài 10: Cho ΔABC. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ở A là ΔABD và ΔACE. Vẽ AH vuông góc với BC, đường thẳng AH cắt DE ở K. Vẽ DM và EN vuông góc với AH ($M, N \in AH$). Chứng minh rằng:

a. DM = EN.

b. DK = EK.

c. Biết ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng CD vuông góc và bằng BE.

Bài 11: Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

a. BI = CK. b. BC = ID + EK.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 2:

a. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 160^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 160^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 320^0 > 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 80^0 = 10^0.$$

b. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 90^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 90^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

c. Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC cân tại A thì $\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 18^0 = 72^0$.

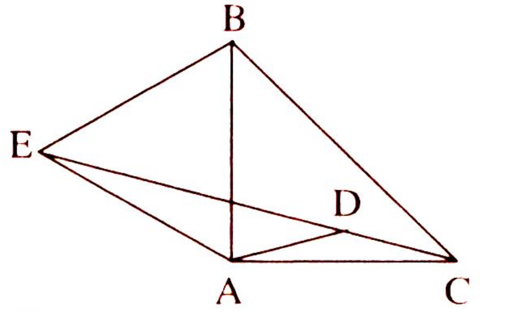
Trường hợp 2: Nếu ΔABC cân tại C thì

$$\hat{B} = \hat{A} = 36^0 \text{ và } \hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 36^0 - 36^0 = 108^0.$$

Trường hợp 3: Nếu ΔABC cân tại B thì

$$\hat{C} = \hat{A} = 36^0 \text{ và } \hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 36^0 - 36^0 = 108^0.$$

Bài 3: Từ giả thiết, ta được $\widehat{ACD} = 15^0$.



Xét ΔACE, ta có:

$AC = AB$, vì ΔABC cân tại A

$AE = AB$, vì ΔABE đều

suy ra

$AC = AE \Leftrightarrow \Delta ACE$ cân tại A.

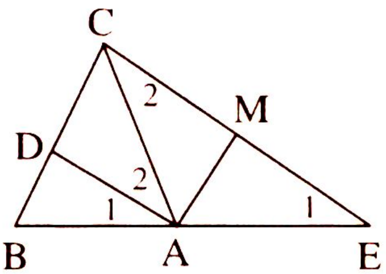
Khi đó:

$$\widehat{ACE} = \widehat{AEC} = \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{CAE}) = \frac{1}{2}[180^0 - (\widehat{EAB} + \widehat{BAC})] = 15^0.$$

Vậy, ta nhận thấy:

$\widehat{ACD} = \widehat{ACE} = 15^0 \Rightarrow$ C, D, E thẳng hàng.

Bài 4: *Hướng dẫn:* có thể sử dụng một trong các cách sau:



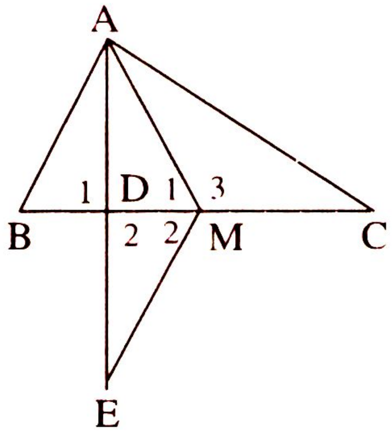
Cách 1: Chứng minh hai góc đồng vị bằng nhau.

Cách 2: Chứng minh hai góc so le trong bằng nhau.

Cách 3: Gọi M là trung điểm của CE, chứng minh AD và CE cùng vuông góc với AM.

Bài 5:

a. Xét hai tam giác ΔDAB, ΔDEM, ta có:



$AD = ED$, giả thiết $AE = 2AD$

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$, vì đối đỉnh

$BD = MD$, vì D là trung điểm của BM

suy ra:

$\Delta DAB = \Delta DEM$

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{M}_2$

và $ME = AB = BM = MC$.

Xét hai tam giác ΔMAE, ΔMAC, ta có:

AM chung

$\widehat{AME} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = M\hat{A}B + \hat{B} = \hat{M}_3$

$ME = MC$

suy ra:

$\Delta MAE = \Delta MAC$, đpcm.

b. Theo kết quả câu a), suy ra $AC = AE = 2AD$, đpcm.

Bài 6:

b. Từ giả thiết:



- Vì ΔABC cân tại A nên:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$

- ΔADE có $AD = AE$ nên cân tại A, suy ra:

$$\hat{D}_1 = \hat{E}_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Suy ra: $\hat{B} = \hat{D}_1 \Rightarrow BC$ // CD do có hai góc đồng vị bằng nhau.

Bài 7: a). 30^0. b). 45^0. c). 60^0.

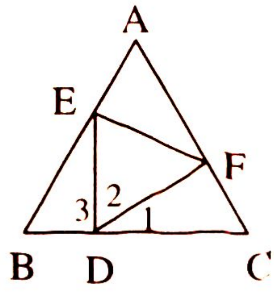
Bài 8: Ta lần lượt có:

- ΔBDE vuông tại D có :

$$\hat{B} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_3 = 90^0 \Rightarrow BE = 2BD = CD.$$

- ΔCDF vuông tại F có :

$$\hat{C} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^0 \Rightarrow CD = 2CF \Rightarrow CF = BD.$$



Xét hai tam giác ΔEBD, ΔCDF, ta có:

$EB = CD$

$\hat{B} = \hat{C}$

$BD = CF$

suy ra:

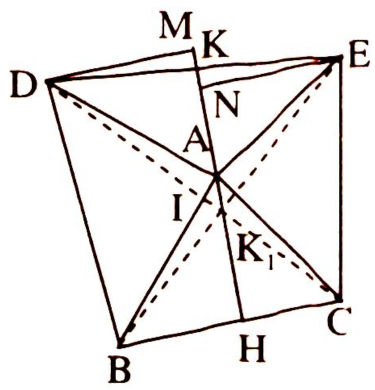
$\Delta EBD = \Delta CDF \Rightarrow DE = DF \Rightarrow \Delta DEF$ cân tại D.

Mặt khác, ta lại có:

$$\hat{D}_2 = 180^0 - \hat{D}_1 - \hat{D}_3 = 180^0 - 30^0 - 90^0 = 60^0.$$

Vậy, ΔDEF cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

Bài 10:



c. Xét hai tam giác ΔABE và ΔADC, chúng có:

$AB = AD$, giả thiết

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^0$$
$$= \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$$

$AE = AC$, giả thiết

suy ra:

$\Delta ABE = \Delta ADC \Rightarrow BE = CD$, đpcm.

Giả sử CD cắt AB, BE theo thứ tự tại I, K_1.

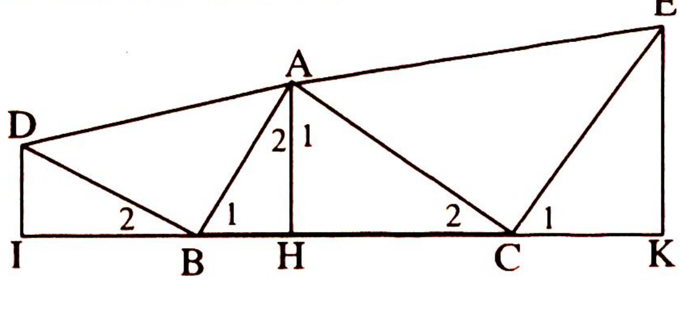
Theo kết quả câu a), ta có $\widehat{ADI} = \widehat{IBK}_1$.

Trong $\Delta\ BIK_1$, ta có:

$$\widehat{IK_1B} = 180^0 - \widehat{IBK}_1 - \widehat{K_1IB} = 180^0 - \widehat{ADI} - \widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^0$$

$\Leftrightarrow CD \perp BE$, đpcm.

Bài 11: Hạ thêm $AH \perp BC$, ta có hình vẽ sau:



Hãy đi chứng minh:

- $\Delta AHC = \Delta CKE$, từ đó suy ra:

$AH = CK$ và $HC = EK$.

- $\Delta AHB = \Delta BID$, từ đó suy ra:

$AH = BI$ và $HB = DI$.

Học sinh tự làm tiếp.

CHỦ ĐỀ 7

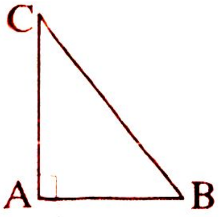
ĐỊNH LÍ PY – TA – GO

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH LÍ PY – TA – GO

Trong tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

Như vậy, với ΔABC vuông tại A ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

☞ ***Nhận xét***: Từ kết quả của định lí Py – ta – go, chúng ta nhận thấy rằng:

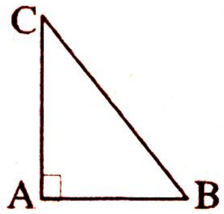
" *Với mỗi tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì sẽ có được độ dài của cạnh còn lại* ".

2. ĐỊNH LÍ PY – TA – GO ĐẢO

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Như vậy, với ΔABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *biết* AB = 4cm, BC = 5cm. *Tính độ dài cạnh* AC.

✍ *Giải*

Vì ΔABC vuông tại A nên:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Leftrightarrow AC = 3cm$$

Vậy, ta được AC = 3cm.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *biết* AB = 3cm, AC = 4cm. *Tính độ dài cạnh* BC.

✍ *Giải*

Vì ΔABC vuông tại A nên:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm$$

Vậy, ta được BC = 5cm.

Ví dụ 3: *Xác định dạng của* ΔABC, *biết* $AB = 0,25cm$, $BC = 0,2cm$, $AC = 0,15cm$.

Giải

Nhận xét rằng:

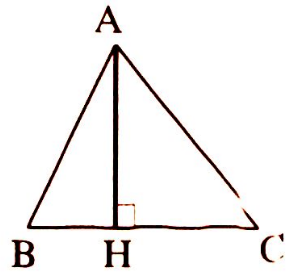
$$BC^2 + AC^2 = (0,2)^2 + (0,15)^2 = 0,04 + 0,0225 = 0,0625 = (0,25)^2 = AB^2$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *nhọn. Vẽ đường cao* AH ($H \in BC$). *Tính chu vi* ΔABC, *biết* $AC = 13cm$, $AH = 12cm$, $BH = 9cm$.

Giải

Để tính được chu vi ΔABC, chúng ta cần xác định độ dài của AB, BC.



- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 9^2$$
$$= 144 + 81 = 225$$
$$\Leftrightarrow AB = 15cm.$$

- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \Leftrightarrow CH = 5cm$$
$$\Rightarrow BC = BH + CH = 9 + 5 = 14cm.$$

Khi đó, chu vi ΔABC được cho bởi:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 15 + 14 + 13 = 32cm.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài cạnh AC, biết:

a. $AB = 3cm$, $BC = 5cm$.
b. $AB = 8cm$, $BC = 10cm$.
c. $AB = 1cm$, $BC = 1,25cm$.
d. $AB = 0,8cm$, $BC = 1cm$.

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài cạnh BC, biết:

a. $AB = AC = 2cm$.
b. $AB = 9cm$, $AC = 12cm$.
c. $AB = 12cm$, $AC = 16cm$.
d. $AB = \sqrt{7}$ cm, $AC = \sqrt{2}$ cm.

Bài 3: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $AB = 15cm$, $BC = 20cm$, $AC = 25cm$.

b. $AB = 4cm$, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, $AC = 4cm$.

Bài 4: Cho ΔABC nhọn. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Tính chu vi ΔABC, biết $AC = 20cm$, $AH = 12cm$, $BH = 5cm$.

Bài 5: Cho hai đoạn thẳng $AC = 16cm$ và $BD = 12cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA biết AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bài 6: Trên đường trung trực d của đoạn AB lấy điểm C bất kỳ. Chứng minh rằng:

a. $CA = CB$.

b. Đường thẳng d là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

Bài 7: Cho góc $\widehat{xOy}$. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox và Oy sao cho OA = OB. Vẽ AH vuông góc với Oy ($H \in Oy$), vẽ BK vuông góc với Ox ($K \in Ox$). Gọi M là giao điểm của AH và BK. Chứng minh rằng:

a. OH = OK.

b. OM là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Bài 8: Cho ΔABC. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại I. Vẽ $IM \perp AB$ ($M \in AB$), $IN \perp BC$ ($N \in BC$), $IP \perp AC$ ($P \in AC$). Chứng minh rằng IM = IN = IP.

Bài 9: Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

a. BI = CK.

b. BC = ID + EK.

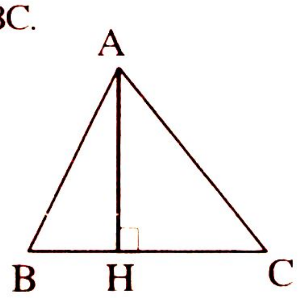
D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a). AC = 4cm. b). AC = 6cm. c). AC = 0,75cm. d). AC = 0,6cm.

Bài 2: a). $BC = 2\sqrt{2}$ cm. b). BC = 15cm. c). BC = 20cm. d). BC = 3cm.

Bài 3: a). ΔABC vuông tại B. b). ΔABC vuông tại A.

Bài 4: Để tính được chu vi ΔABC, ta cần xác định độ dài của AB, BC.



- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 5^2$$
$$= 144 + 25 = 169$$
$$\Leftrightarrow AB = 13cm.$$

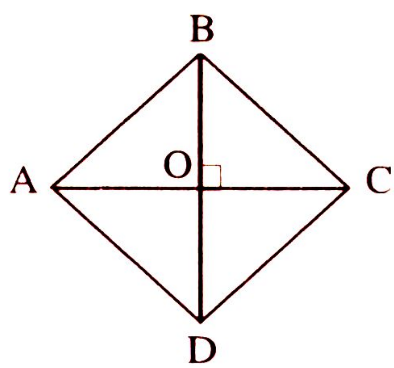
- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$
$$\Leftrightarrow CH = 16cm$$
$$\Rightarrow BC = BH + CH = 5 + 16 = 21cm.$$

Khi đó, chu vi ΔABC được cho bởi:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 13 + 21 + 20 = 54cm.$$

Bài 5: Ta có ngay:



$$OA = \frac{1}{2}AC = 8cm,$$

$$OB = \frac{1}{2}BD = 6cm,$$

Ngoài ra, ta có các tam giác vuông ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA bằng nhau, do đó:

$$AB = BC = CD = DA = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10cm.$$

CHỦ ĐỀ 8

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Chúng ta đã biết các trường hợp bằng nhau sau của tam giác vuông:

Trường hợp 1: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 2: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Ngoài ra, nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Chứng minh trường hợp bằng nhau thứ 4 của hai tam giác vuông.*

✍ *Giải*

Giả sử, có ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1, biết $AB = A_1B_1$ và $BC = B_1C_1$, ta cần đi chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Thật vậy:

- Trong ΔABC vuông tại A, ta có:
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (1)$$
- Trong $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1, ta có:
$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 \Leftrightarrow A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra:
$$AC^2 = A_1C_1^2 \Leftrightarrow AC = A_1C_1.$$

Khi đó, hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$, có:

$AB = A_1B_1$,
$\hat{A} = \hat{A}_1 = 90^0$,
$AC = A_1C_1$.

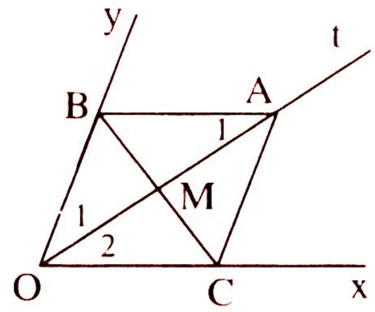
Suy ra $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (c.g.c).

Ví dụ 2: *Cho góc* xOy *khác góc bẹt. Trên tia phân giác* Ot *của góc* xOy *lấy điểm* A. *Gọi* M *là trung điểm của* OA. *Đường thẳng qua* M *vuông góc với* OA *cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* B *và* C. *Chứng minh rằng* AB // Ox *và* AC // Oy.

✍ *Giải*

Từ giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.



a. Chứng minh AB // Ox.

Xét hai tam giác vuông ΔMAB và ΔMOB, chúng có:

MB chung.

MA = MO, vì M là trung điểm OA

suy ra:

$\Delta MAB = \Delta MOB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{O}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{O}_2$

⇔ AB // Ox, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

b. Chứng minh AC // Oy — *Học sinh tự làm.*

Ví dụ 3: *Cho góc* $\widehat{xOy}$ *nhọn,* M *là điểm nằm trong góc đó.*

a. *Hãy vẽ các điểm* A *và* B *sao cho* Ox *là đường trung trực của* MA *và* Oy *là đường trung trực của* MB.

b. *Chứng minh rằng điểm* O *thuộc đường trung trực của* AB.

c. *Tính số đo của góc* $\widehat{AOB}$, *biết* $\widehat{xOy} = \alpha$.

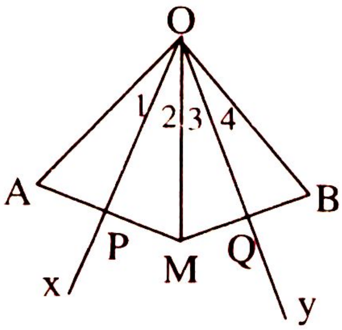
d. *Hãy xác định vị trí của điểm* O *khi* $\widehat{xOy} = 90^0$.

✍ *Giải*

a. Ta thực hiện, như sau:

- Vẽ MP ⊥ Ox, rồi lấy trên tia MP điểm A sao cho PA = PM.
- Vẽ MQ ⊥ Oy, rồi lấy trên tia MQ điểm B sao cho QB = QM.

b. Ta có:



- Vì OP là trung trực của AM nên: OM = OA. (1)
- Vì OQ là trung trực của BM nên: OM = OB. (2)

Từ (1), (2) suy ra:

OA = OB ⇔ O thuộc đường trung trực của AB.

c. Nhận xét về các cặp tam giác vuông có chung một cạnh và một cạnh khác bằng nhau, ta có:

$\Delta POA = \Delta POM \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

$\Delta QOB = \Delta QOM \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Ta có:

$\widehat{xOy} = \hat{O}_2 + \hat{O}_3$.

$\widehat{AOB} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = (\hat{O}_1 + \hat{O}_4) + (\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$

$= (\hat{O}_2 + \hat{O}_3) + (\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\widehat{xOy} = 2\alpha$.

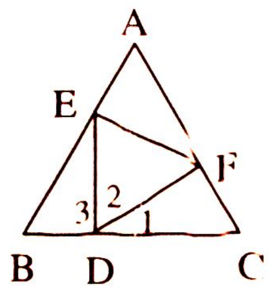
d. Nếu $\widehat{xOy} = 90^0$ thì

$\widehat{AOB} = 2.90^0 = 180^0$

⇔ A, O, B thẳng hàng ⇔ O là trung điểm của AB.

Ví dụ 4: *Cho ΔABC đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho BC = 3BD. Vẽ DE vuông góc với BC (E ∈ AB), vẽ DF vuông góc với AC (F ∈ AC). Chứng minh rằng ΔDEF là tam giác đều.*

✍ *Giải*



Trong ΔBDE vuông tại D ta có:

$\hat{B} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_3 = 90^0 \Rightarrow BE = 2BD = CD.$

Xét hai tam giác vuông ΔEBD, ΔCDF, ta có:

EB = CD, hai cạnh huyền

$\hat{B} = \hat{C} = 60^0$, cặp góc nhọn

suy ra:

ΔEBD = ΔCDF ⇒ DE = DF ⇒ ΔDEF cân tại D.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{D}_2 = 180^0 - \hat{D}_1 - \hat{D}_3 = 180^0 - 30^0 - 90^0 = 60^0.$

Vậy, ΔDEF cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

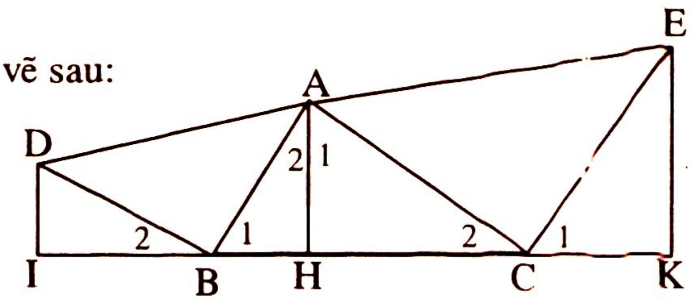
Ví dụ 5: *Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC (I, K ∈ BC). Chứng minh rằng:*

a. BI = CK.

b. BC = ID + EK.

✍ *Giải*

Hạ thêm AH ⊥ BC, ta có hình vẽ sau:



Ta lần lượt xét:

- Xét hai tam giác vuông ΔAHC và ΔCKE, ta có:

AC = CE,

vì ΔACE vuông cân tại C

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$, hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra: ΔAHC = ΔCKE (cạnh huyền và một góc nhọn)

⇒ AH = CK (1)

và HC = EK. (2)

- Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔBID, ta có:

AB = BD, vì ΔABD vuông cân tại B

$\hat{A}_2 = \hat{B}_2$, hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra: ΔAHB = ΔBID (cạnh huyền và một góc nhọn)

⇒ AH = BI (3)

và HB = DI. (4)

a. Từ (1), (3) suy ra BI = CK.

b. Cộng theo vế (2) và (4), ta được:

HC + HB = EK + DI ⇔ BC = EK + DI, đpcm.

CHƯƠNG III – QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC
CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

CHỦ ĐỀ 1

QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trong một tam giác:

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

☞ ***Nhận xét***:

- Trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông), góc tù (hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông - cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.
- Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *có* $AB > AC$. *Hãy so sánh hai góc* $\hat{B}$ *và* $\hat{C}$.

✍ *Giải*

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = AC, do AB > AC nên D nằm giữa A và B.

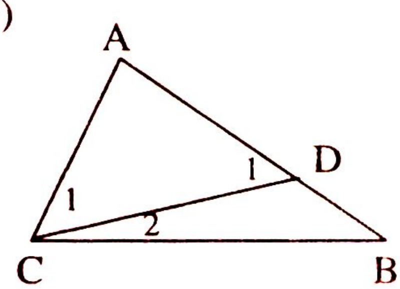
Trong ΔACD, ta có: $AC = AD \Leftrightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$. (*)

Nhận xét rằng:

$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 > C_1$. (1)

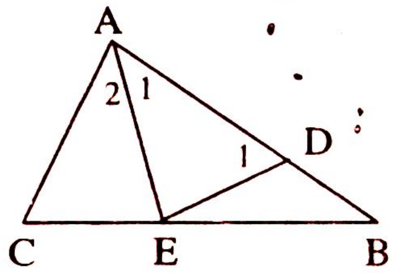
$\hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2 > \hat{B}$. (2)

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\hat{C} > \hat{B}$.



☞ ***Nhận xét***:

1. Trong ΔABC, góc $\hat{B}$ đối diện với cạnh AC, còn góc $\hat{C}$ đối diện với cạnh AB, điều này có nghĩa là "*Đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn*".
2. Ta có thể chứng minh $\hat{C} > \hat{B}$ bằng cách khác, như sau:
   Kẻ tia phân giác AE của góc $\hat{A}$ ($E \in BC$).
   Xét hai tam giác ΔACE và ΔADE, ta có:
   AC = AD, giả thiết
   $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, vì AE là phân giác góc $\hat{A}$
   AE chung



suy ra: $\Delta ACE = \Delta ADE$

$\Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_1 > \hat{B}$, vì $\hat{D}_1$ là góc ngoài.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* $\hat{B} > \hat{C}$. *Chứng minh rằng* $AB < AC$.

Giải

Giả sử trái lại, ta có $AB \geq AC$.

Khi đó, nhận thấy rằng:

- Nếu $AB = AC$ thì $\hat{C} = \hat{B}$, mâu thuẫn.
- Nếu $AB > AC$ thì $\hat{C} > \hat{B}$, mâu thuẫn.

Vậy, ta luôn có $AB < AC$.

Nhận xét: Để thực hiện ví dụ trên chúng ta đã sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng và ở đó chúng ta đã tận dụng được hai định lí đã biết về góc.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *So sánh các góc của* ΔABC, *biết* $AB = 6cm$, $BC = 4cm$, $AC = 8cm$.

Giải

Ta nhận thấy rằng: $BC < AB < AC \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$.

Ví dụ 2: *So sánh các cạnh của* ΔABC, *biết* $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 40^0$.

Giải

Ta có: $\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 100^0 - 40^0 = 40^0$.

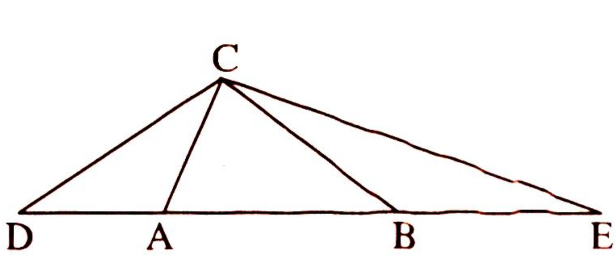
Khi đó, nhận thấy rằng: $\hat{B} = \hat{C} < \hat{A} \Leftrightarrow AC = AB < BC$.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, $\hat{B} = 40^0$.

a. *So sánh các cạnh của* ΔABC.

b. *Trên tia đối của tia* AB *lấy điểm* D *sao cho* AD = AC. *Trên tia đối của tia* BA *lấy điểm* E *sao cho* BE = BC. *So sánh độ dài các đoạn* CD, CB, CE.

Giải



a. Trong ΔABC, ta có:

$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B}$

$= 180^0 - 80^0 - 40^0 = 60^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng:

$\hat{A} > \hat{C} > \hat{B} \Leftrightarrow BC > AB > AC$.

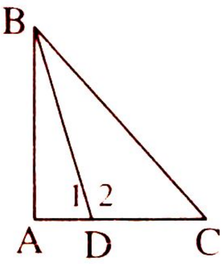
b. Trong ΔBCD, ta có: $\hat{D} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 40^0 = \widehat{ABC} \Leftrightarrow CD = CB$.

Trong ΔBCE, ta có:

$\widehat{EBC} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - 40^0 = 120^0$ là góc tù $\Rightarrow CE > CB$.

Vậy, ta được $CD = CB < CE$.

Ví dụ 4: *Cho ΔABC vuông tại A. Lấy điểm D trên cạnh AC. So sánh độ dài của BC và BD.*



Giải

Trong ΔABD, ta có:

$\hat{D}_2 = \hat{A} + \widehat{ABD} \Rightarrow \hat{D}_2$ là góc tù.

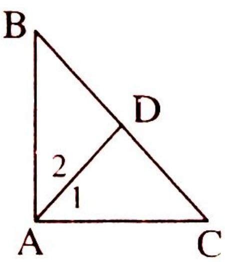
Trong ΔBCD có $\hat{D}_2$ là góc tù nên $BC > BD$.

Ví dụ 5: *Chứng minh rằng trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.*

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, trung tuyến AD. Ta cần đi chứng minh $AD = \frac{1}{2}BC$.

Giả sử trái lại, tức là $AD \neq \frac{1}{2}BC$.



- Nếu $AD > \frac{1}{2}BC$, suy ra:

  $AD > BD \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{A}_2$,

  $AD > CD \Leftrightarrow \hat{C} > \hat{A}_1$,

  $\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} > \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 90^0 > \hat{A}$, mâu thuẫn.

- Nếu $AD < \frac{1}{2}BC$, suy ra:

  $AD < BD \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{A}_2$,

  $AD < CD \Leftrightarrow \hat{C} < \hat{A}_1$,

  $\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} < \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 90^0 < \hat{A}$, mâu thuẫn.

Vậy, ta luôn có $AD = \frac{1}{2}BC$.

Ví dụ 6: *Cho ΔABC có $AB < AC$.*

a. *Gọi M là trung điểm của BC. So sánh $\widehat{BAM}$ và $\widehat{CAM}$.*

b. *Tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. So sánh độ dài của BD và CD.*

Giải

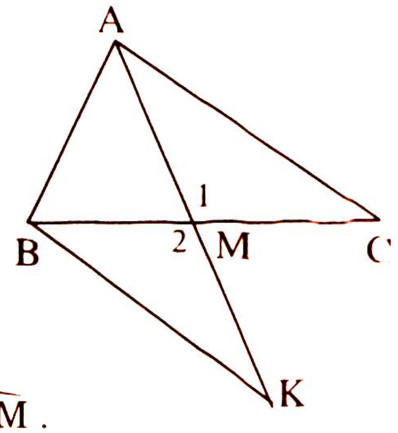
a. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AM = KM.

Xét hai tam giác ΔAMC và ΔKMB, ta có:

AM = KM

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, vì đối đỉnh

CM = BM, vì M là trung điểm BC



do đó ΔAMC = ΔKMB suy ra:

$\widehat{CAM} = \widehat{BKM}$.

BK = AC > AB.

Khi đó, trong ΔABK vì:

$BK > AB \Leftrightarrow \widehat{BAK} > \widehat{BKA} \Leftrightarrow \widehat{BAM} > \widehat{CAM}$.

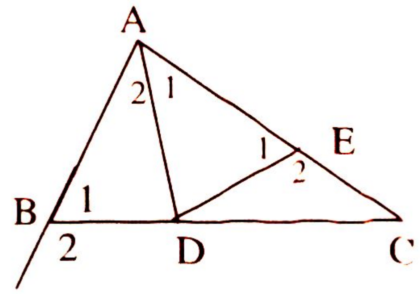
b. Lấy điểm E trên AC sao cho AE = AB.

Xét hai tam giác ΔABD và ΔAED, ta có:

AB = AE

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, vì AD là phân giác

AD chung



do đó ΔABD = ΔAED suy ra:

BD = DE.

$\hat{B}_1 = \hat{E}_1 \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{E}_2$. (1)

Mặt khác, ta lại có: $\hat{B}_2 > \hat{C}$, vì $\hat{B}_2$ là góc ngoài của ΔABC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\hat{E}_2 > \hat{C}$.

Khi đó, trong ΔCDE vì: $\hat{E}_2 > \hat{C} \Leftrightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD$.

Nhận xét: Qua ví dụ trên chúng ta có thể đánh giá được vị trí của các tia AB, AD, AM đó là "*Tia AD nằm giữa hai tia AB và AM*".

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: So sánh các góc của ΔABC, biết:

a. AB = 3cm, BC = 4cm, AC = 5cm.

b. AB = 8cm, BC = 6cm, AC = 4cm.

c. AB = 11cm, BC = 4cm, AC = 8cm.

d. AB = AC = 11cm, BC = 15cm.

Bài 2: So sánh các cạnh của ΔABC, biết:

a. $\hat{B} = 90^0$, $\hat{C} = 45^0$.

b. $\hat{C} = 80^0$, $\hat{A} = 20^0$.

Bài 3: Cho ΔABC có $\hat{A} = 85^0$, $\hat{B} = 40^0$

a. So sánh các cạnh của ΔABC.

b. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE.

Bài 4: Cho ΔABC có $\hat{A} = 45^0$, $\hat{B} = 95^0$.

a. So sánh các cạnh của ΔABC.

b. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE.

Bài 5: Cho ΔABC có góc B tù. Lấy điểm D trên cạnh BC.

Chứng minh rằng AB < AD < AC.

Bài 6:

a. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30^0 bằng một phần hai cạnh huyền.

b. Áp dụng: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$, các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ đều nhọn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, AB. Kẻ các đường cao BH, CK. Xác định dạng của các tam giác ΔAHN, ΔAKM.

Bài 7: Cho ΔABC vuông tại B. Tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. So sánh độ dài của BD và CD.

Bài 8: Cho ΔABC. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. So sánh độ dài của AB và BC, biết rằng góc $\widehat{BDC}$ tù.

Bài 9: Cho ΔABC có BC = a, AC = b và các chiều cao tương ứng với hai cạnh đó theo thứ tự bằng h_a, h_b.

a. Tìm tam giác có $h_a = a$, $h_b = b$.

b. Có thể khẳng định được $h_b < a$ không?

c. Có nhận xét gì về quan hệ độ dài giữa h_a và b, giữa h_b và a?

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Vì AB < BC < AC nên $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.

b. Vì AB > BC > AC = 4cm nên $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$.

c. Vì BC < AC < AB nên $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$.

d. Vì AB = AC < BC nên $\hat{C} = \hat{B} < \hat{A}$.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

$$\hat{A} = \hat{C} < \hat{B} \Leftrightarrow BC = AB < AC.$$

b. Ta có:

$$\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 20^0 - 80^0 = 100^0.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

$$\hat{A} < \hat{C} < \hat{B} \Leftrightarrow BC < AB < AC.$$

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 85^0 - 40^0 = 55^0.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

$$\hat{B} < \hat{C} < \hat{A} \Leftrightarrow AC < AB < BC.$$

b. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4.

a. Ta có:

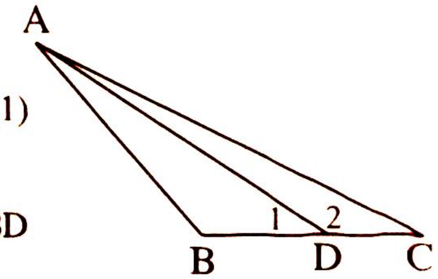
$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 45^0 - 95^0 = 40^0.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

$$\hat{C} < \hat{A} < \hat{B} \Leftrightarrow AB < BC < AC.$$

b. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. Ta lần lượt xét:



- Trong ΔABD có góc $\hat{B}$ tù, do đó:

  $\hat{D}_1 < \hat{B} \Leftrightarrow AB < AD.$ (1)

- Trong ΔADC, ta có:

  $\hat{D}_2 > \hat{B}$, vì $\hat{D}_2$ là góc ngoài ΔABD

  $\hat{B} > \hat{C}$, vì ΔABC, có góc $\hat{B}$ tù

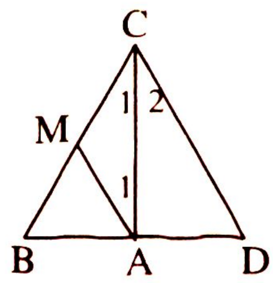
  $\Rightarrow \hat{C} < \hat{D}_2 \Leftrightarrow AD < AC.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AB < AD < AC$, đpcm.

Bài tập 6.

a. Giả sử ΔABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^0$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho AB = MB

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác cân

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

$\Leftrightarrow AB = BM = MA.$

Trong ΔMAC, ta có:

$\hat{A}_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \hat{C}_1$

$\Leftrightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Leftrightarrow MA = MC.$

Khi đó:

$$BC = BM + CM = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC. \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AB = AD.

Nhận xét rằng ΔBCD có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên:

ΔBCD là tam giác cân $\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

Khi đó:

$$BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC.\ \text{đpcm.}$$

b. Đề nghị học sinh tự vẽ hình.

Ta lần lượt xét:

- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$\hat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{ABH} = 30^0 \Leftrightarrow AH = \frac{1}{2}AB = AN.$$

Vậy, tam giác ΔAHN là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc $\hat{A} = 60^0$.

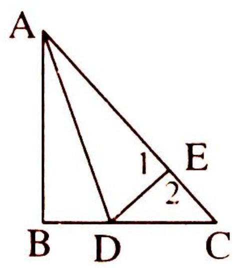
- Trong ΔKAC vuông tại K, ta có:

$$\hat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{ACK} = 30^0 \Leftrightarrow AK = \frac{1}{2}AC = AM.$$

Vậy, tam giác ΔAKM là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc $\hat{A} = 60^0$.

☞ ***Nhận xét***: Qua bài tập trên, chúng ta thu nhận được một kết quả: *"Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng bằng nửa cạnh huyền và ngược lại".*

Bài tập 7. Lấy điểm E trên AC sao cho AE = AB.



Xét hai tam giác ΔABD và ΔAED, ta có:

$AB = AE$

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, vì AD là phân giác

AD chung

do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ suy ra:

$BD = DE.$

$\hat{E}_1 = \hat{B} = 90^0 \Rightarrow \hat{E}_2 = 90^0.$

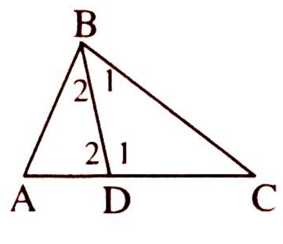
Khi đó, trong ΔCDE vì:

$\hat{E}_2 = 90^0 \Rightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD.$

Bài tập 8. Để so sánh độ dài của AB và BC, ta cần đi so sánh hai góc $\hat{C}$ và $\hat{A}$.

Theo giả thiết góc $\widehat{BDC}$ tù, tức là:

$\hat{D}_1 > 90^0 \Leftrightarrow 2\hat{D}_1 > 180^0.$



Trong ΔABD, ta có:

$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_2.$ (1)

Trong ΔBCD, ta có:

$\hat{D}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C} = 180^0.$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ra được:

$2\hat{D}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}_2 + 180^0$

$\Leftrightarrow \hat{A} - \hat{C} = 2\hat{D}_1 - 180^0 > 0 \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C} \Leftrightarrow BC > AB.$

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy thực hiện bài tập trên bằng một cách khác.

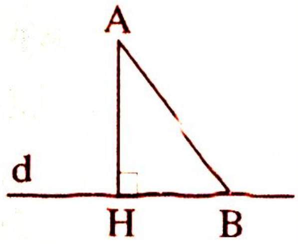
CHỦ ĐỀ 2

QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM ĐƯỜNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG XIÊN, HÌNH CHIẾU CỦA ĐƯỜNG XIÊN

Điểm A ở ngoài đường thẳng d, kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Trên d lấy điểm B bất kì (B ≠ H). Khi đó:



- Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d. Điểm H được gọi là *chân* đường vuông góc hay *hình chiếu* của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.
- Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên đường thẳng d.

2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

☛ ***Chú ý***: Độ dài đường vuông góc AH gọi là *khoảng cách từ điểm* A *đến đường thẳng* d.

3. CÁC ĐƯỜNG XIÊN VÀ CÁC HÌNH CHIẾU CỦA CHÚNG

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

a. Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

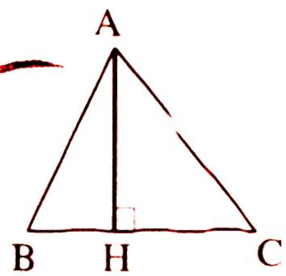
b. Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

c. Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC ĐƯỜNG XIÊN VÀ CÁC HÌNH CHIẾU CỦA CHÚNG

Ví dụ 1: *Cho hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng:*



a. *Nếu* HB < HC *thì* AB < AC *và ngược lại, nếu* AB < AC *thì* HB < HC.

b. *Nếu* HB = HC *thì* AB = AC *và ngược lại, nếu* AB = AC *thì* HB = HC.

✍ *Giải*

Trong các tam giác ΔHAB vuông tại H và ΔHAC vuông tại H, ta có:

$HB^2 = AB^2 - AH^2$,

$HC^2 = AC^2 - AH^2$.

a. Với giả thiết:

$HB < HC \Leftrightarrow HB^2 < HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 < AC^2 - AH^2$

$\Leftrightarrow AB^2 < AC^2 \Leftrightarrow AB < AC$, đpcm.

b. Với giả thiết:

$HB = HC \Leftrightarrow HB^2 = HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 = AC^2 - AH^2$

$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow AB = AC$, đpcm.

☞ ***Chú ý:*** Ta cũng có thể chứng minh được " *Nếu HB < HC thì AB < AC* " bằng việc sử dụng mối quan hệ góc với cạnh đối diện trong tam giác. Thật vậy:

Lấy điểm D trên HC sao cho HB = HD, suy ra:

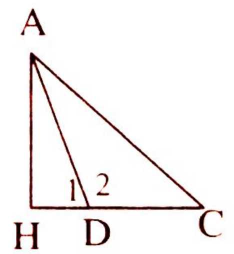
ΔABD cân tại A ⇔ AB = AD.

Trong ΔAHD, ta có:

$\hat{D}_2 = \hat{H} + \widehat{HAD} \Rightarrow \hat{D}_2$ là góc tù.

Trong ΔACD có $\hat{D}_2$ là góc tù nên:

AC > AD ⇔ AC > AB.



Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC ĐƯỜNG XIÊN VÀ CÁC HÌNH CHIẾU CỦA CHÚNG GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *có* AB = AC = 5cm, BC = 8cm. *Tính khoảng cách từ* A *đến* BC.

✍ *Giải*

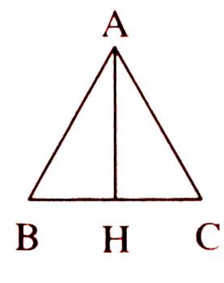
Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$BH = \frac{1}{2}BC = 4cm$, vì ΔABC cân tại A

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

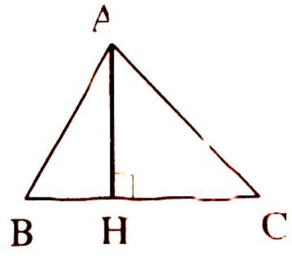
$\Leftrightarrow AH = 3cm$.



Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 3cm.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* AB = 6cm, BC = 10cm. *Gọi* H *là hình chiếu của* A *lên* BC. *Chứng tỏ rằng* HC > HB.

✍ *Giải*



Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\Leftrightarrow AC = 8cm$

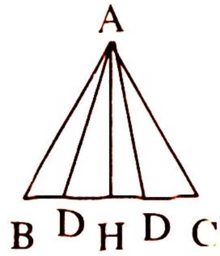
$\Rightarrow AC > AB \Leftrightarrow HC > HB$, đpcm.

☛ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, nếu chúng ta không sử dụng tính chất về mối liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên thì chúng ta cần đi xác định độ dài các đoạn thẳng BH và CH, để thực hiện công việc này rất cồng kềnh.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng trong một tam giác cân, độ dài đoạn thẳng nối đỉnh đối diện với đáy và một điểm bất kì của cạnh đáy nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của cạnh bên.*

✍ *Giải*

Xét ΔABC cân tại A, lấy một điểm D bất kì trên cạnh BC, chúng ta cần đi chứng minh $AD \le AB$.



Gọi H là hình chiếu của A lên BC.

- Nếu D thuộc cạnh BH thì

  $DH \le BH \Leftrightarrow AD \le AB$.

- Nếu D thuộc cạnh CH thì

  $DH \le CH \Leftrightarrow AD \le AC \Leftrightarrow AD \le AB$.

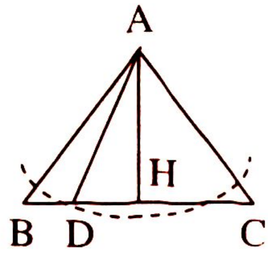
Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *có* $AB = AC = 10cm$, $BC = 12cm$.

a. *Tính khoảng cách từ* A *đến* BC.

b. *Vẽ cung tròn tâm* A *có bán kính bằng* 9cm. *Cung đó có cắt đường thẳng* BC *hay không, có cắt cạnh* BC *hay không? Vì sao?*

✍ *Giải*

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.



Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$BH = \frac{1}{2}BC = 6cm$, vì ΔABC cân tại A

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\Leftrightarrow AH = 8cm$.

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 8cm.

a. Theo kết quả câu a), ta có:

$AH < 9cm \Rightarrow$ cung tròn tâm A bán kính 9cm cắt đường thẳng BC.

Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC lại D, suy ra:

$AD = 9cm < AB \Leftrightarrow DH < BH$

Vậy, cung tròn tâm A bán kính 9cm cắt cạnh BC.

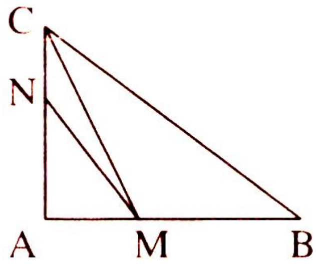
☞ *Nhận xét*: Qua ví dụ trên, ta thấy:

- Một cung tròn tâm A bán kính R sẽ cắt đường thẳng a nếu khoảng cách từ A đến đường thẳng a lớn hơn R.
- Để xét xem cung tròn tâm A bán kính R có cắt đoạn thẳng BC hay không, chúng ta cần so sánh R với các đường xiên AB và AC.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Trên cạnh* AB *lấy điểm* M (M ≠ B), *trên cạnh* AC *lấy điểm* N (N ≠ C). *Chứng minh rằng* MN < BC.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:



- AM, AB theo thứ tự là hình chiếu của CM và CB, ta có:

  AM < AB ⇔ CM < CB. (1)
- AN, AC theo thứ tự là hình chiếu của MN và MC, ta có:

  AN < AC ⇔ MN < MC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN < BC, đpcm.

☞ ***Chú ý***:

1. Kết quả trên vẫn đúng khi thay " *ΔABC vuông tại A* " bằng:

   " *ΔABC có* $\hat{A}$ *tù* " hoặc " *ΔABC cân tại C* "

   hoặc " *ΔABC có* $\hat{A} \geq \hat{B}$ ".
2. Ta có thể sử dụng mối quan hệ về góc và cạnh đối diện trong tam giác để thực hiện ví dụ trên. Thật vậy:
   - Trong ΔBCM có góc $\widehat{BMC}$ là góc tù, do đó:

     CM < CB. (3)
   - Trong ΔCMN có góc $\widehat{CNM}$ là góc tù, do đó:

     MN < CM. (4)

   Từ (3) và (4) suy ra MN < BC, đpcm.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Gọi* M *là điểm bất kì trên cạnh đáy* BC. *Chứng minh rằng khi* M *thay đổi vị trí trên cạnh* BC *thì tổng các khoảng cách từ* M *đến hai cạnh bên* AB *và* AC *vẫn không đổi.*

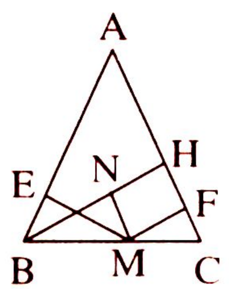
✍ *Giải*

Kẻ đường cao BH, ME ⊥ AB, MF ⊥ AC.

Kẻ MN // AC (N ∈ BH), suy ra:

MN ⊥ BH và MF = NH. (1)

Xét hai tam giác vuông ΔBEM và ΔMNB, ta có:



BM chung

$\widehat{BMN} = \hat{C} = \hat{B}$

do đó ΔBEM = ΔMNB (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra:

ME = BN. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

MF + ME = NH + BN = BH – không đổi.

Vậy, khi M thay đổi vị trí trên cạnh BC thì tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên AB và AC vẫn không đổi.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Gọi* M *là trung điểm* AC. *Gọi* E, F *theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ* A *và* C *đến đường thẳng* BM.

a. *So sánh* AC *với tổng* AE + CF.

b. *Chứng minh rằng* AB < $\frac{1}{2}$(BE + BF).

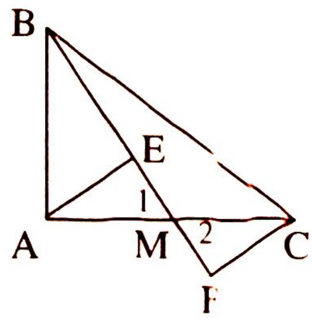
✍ *Giải*

a. Ta lần lượt thấy:

- Trong tam giác vuông ΔEAM, ta có AM > AE. (1)
- Trong tam giác vuông ΔFCM, ta có CM > CF. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

AM + CM > AE + CF ⇔ AC > AE + CF.



b. Xét hai tam giác vuông ΔEAM và ΔFCM, ta có:

AM = CM, vì M là trung điểm AC

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

do đó ΔEAM = ΔFCM (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra:

EM = FM.

Trong tam giác vuông ΔABM, ta có:

AB < BM và vì BM = BE + EM nên AB < BE + EM. (3)

AB < BM và vì BM = BF – FM nên AB < BF – FM. (4)

Cộng theo vế (3), (4) và sử dụng kết quả EM = FM, ta được:

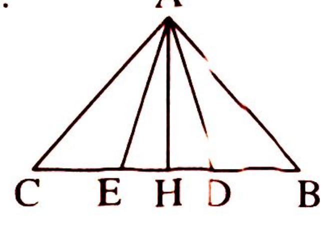
2AB < BE + BF ⇔ AB < $\frac{1}{2}$(BE + BF), đpcm.

☞ ***Chú ý***:

1. Kết quả câu a) vẫn đúng khi " *ΔABC tùy ý và M là điểm bất kì trên AC* ".
2. Kết quả câu b) vẫn đúng khi " *ΔABC có góc $\hat{A}$ tù* ".

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Trên* BC *lấy các điểm* D *và* E *sao cho* $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$. *So sánh các độ dài:*

a. AB *và* AE. b. BD *và* DE.



✍ *Giải*

Ta có:

$\hat{B} = \hat{C}$, vì ΔABC cân tại A

$\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$, giả thiết

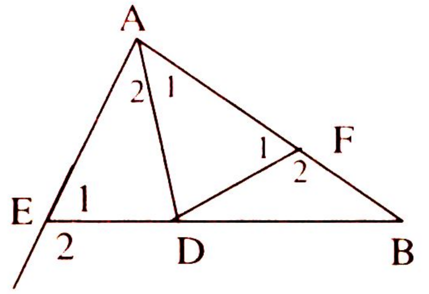
suy ra: $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = \Leftrightarrow$ ΔADE cân tại A.

Khi đó, gọi H là trung điểm DE thì AH ⊥ DE.

a. Vì BH, DH theo thứ tự là hình chiếu của AB và AD, ta có:

$BH > DH \Leftrightarrow AB > AD \Leftrightarrow AB > AE$, vì $AD = AE$.

b. Lấy điểm F trên AB sao cho AE = AF.



Xét hai tam giác ΔAED và ΔAFD, ta có:

$AF = AE$

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, giả thiết

AD chung

do đó ΔAED = ΔAFD suy ra:

$DE = DF$.

$\hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Leftrightarrow \hat{E}_2 = \hat{F}_2$. (1)

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{E}_2 > \hat{B}$, vì $\hat{E}_2$ là góc ngoài của ΔABE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\hat{F}_2 > \hat{B}$.

Khi đó, trong ΔBDF vì:

$\hat{F}_2 > \hat{B} \Leftrightarrow BD > DF \Leftrightarrow BD > DE$.

Ví dụ 9: *Cho* ΔABC *có* AB < AC, *Phân giác* AD, *trung tuyến* AM, *đường cao* AH.

a. *So sánh độ dài của* HB *và* HC.

b. *Chứng minh rằng* $\widehat{HAC} > \dfrac{\hat{A}}{2}$.

c. *Nhận xét gì về vị trí của các tia* AH, AD, AM.

✍ *Giải*

a. Trong ΔABC với giả thiết AB < AC, suy ra HB < HC.

b. Trong ΔABC với giả thiết AB < AC, suy ra:

$\hat{C} < \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} - \hat{C} > 0$.

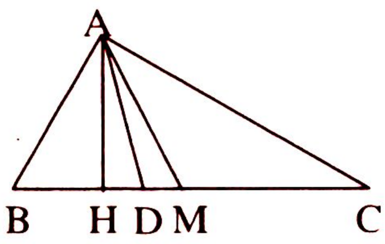
Trong ΔAHC vuông tại H, ta có:

$$\widehat{HAC} = 90^0 - \hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \hat{C} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} > \frac{\hat{A}}{2}, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có nhận xét:

$$\widehat{CAM} < \widehat{CAD} = \frac{\hat{A}}{2} < \widehat{CAH}$$

do đó AD nằm giữa hai tia AH và AM.



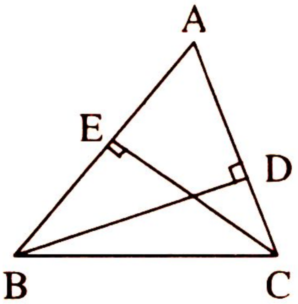
☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, ta thấy:

"*Trong ΔABC có không cân tại A thì tia phân giác của góc $\hat{A}$ và đường trung trực cạnh BC bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm nằm ngoài tam giác*".

Nhận xét trên, sẽ giúp các em học sinh tránh mắc sai lầm khi vẽ hình.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình vẽ sau. Chứng minh rằng AB + AC > BD + CE.



Hãy phát biểu kết quả tổng quát.

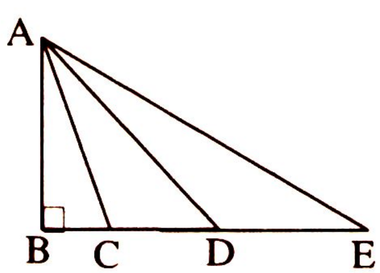
Bài 2: Cho ΔABC. Tính khoảng cách từ A đến BC, biết:

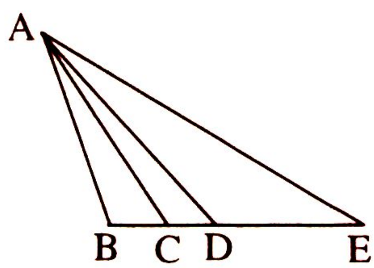
a. AB = AC = 5cm, BC = 6cm.

b. AB = 15cm, AC = 20cm, BC = 25cm.

Bài 3: Cho ΔABC đều có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác.

Bài 4: Cho các hình vẽ sau. So sánh các độ dài AB, AC, AD, AE.





Bài 5: Cho ΔABC cân tại A, có AB = 5cm, BC = 6cm.

a. Tính khoảng cách từ A đến BC.

b. Vẽ cung tròn tâm A có bán kính bằng 6cm. Cung đó có cắt đường thẳng BC hay không, có cắt cạnh BC hay không ? Vì sao ?

Bài 6: Cho ΔABC cân tại C. Trên cạnh AB lấy điểm M (M ≠ B), trên cạnh AC lấy điểm N (N ≠ C). Chứng minh rằng MN < BC.

Bài 7: Cho ΔABC có $\hat{A} > \hat{B}$. Trên cạnh AB lấy điểm M (M ≠ B), trên cạnh AC lấy điểm N (N ≠ C). Chứng minh rằng MN < BC.

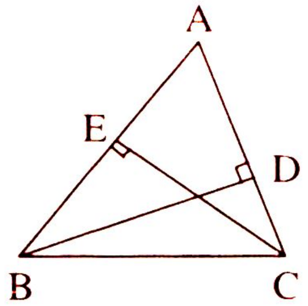
Bài 8: Cho ΔABC, điểm M nằm giữa A và C. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. So sánh AC với tổng AE + CF.

Bài 9: Cho ΔABC có góc $\hat{A}$ tù. Gọi M là trung điểm AC. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh rằng:

$$AB < \frac{1}{2}(BE + BF).$$

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta lần lượt nhận thấy:



- Trong tam giác vuông ΔABD, ta có:

$$AB > BD. \qquad (1)$$

- Trong tam giác vuông ΔACE, ta có:

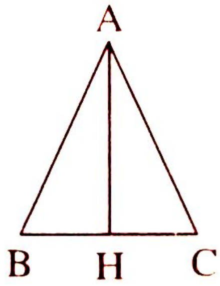
$$AC > CE. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$AB + AC > BD + CE.$$

Tổng quát: Trong một tam giác tổng ba cạnh lớn hơn tổng ba đường cao.

Bài 2:



a. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

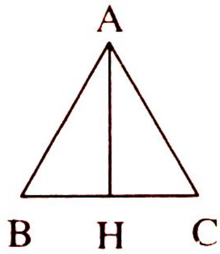
$$BH = \frac{1}{2}BC = 3cm, \text{ vì } \Delta ABC \text{ cân tại A}$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4cm.$$

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 4cm.

b. Khoảng cách từ A đến BC bằng 12cm.

Bài 3: Vì ΔABC đều nên khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác là bằng nhau, do đó ta cần tính khoảng cách từ A đến BC.



Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ đều}$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

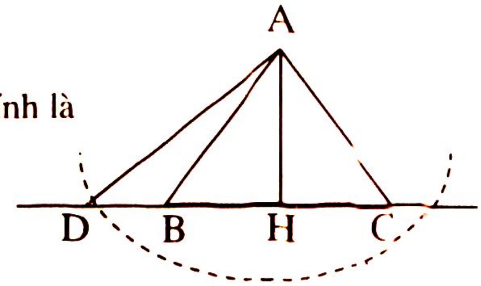
☞ ***Nhận xét***: Qua bài tập trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả "*Trong một tam giác đều cạnh bằng a thì độ dài đường cao bằng* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$".

Bài 4:

a. $AB < AC < AD < AE$.

b. $AB < AC < AD < AE$.

Bài 5:



a. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$BH = \frac{1}{2}BC = 3cm$, vì ΔABC cân tại A

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4cm$.

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 4cm.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

$AH < 6cm \Rightarrow$ cung tròn tâm A bán kính 6cm cắt đường thẳng BC.

Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC lại D, suy ra:

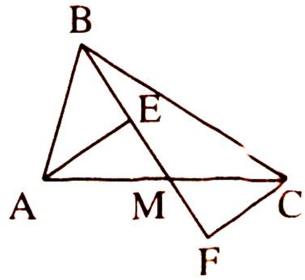
$AD = 6cm > AB \Leftrightarrow DH > BH$

Vậy, cung tròn tâm A bán kính 6cm không cắt cạnh BC.

Bài 6: Tham khảo ví dụ 2.

Bài 7: Tham khảo ví dụ 2.

Bài 8: Ta lần lượt thấy:



- Trong tam giác vuông ΔEAM, ta có:

  $AM > AE$. (1)

- Trong tam giác vuông ΔFCM, ta có:

  $CM > CF$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$AM + CM > AE + CF \Leftrightarrow AC > AE + CF$.

Bài 9: Đề nghị học sinh tự vẽ hình với lưu ý góc $\hat{A}$ tù.

Xét hai tam giác vuông ΔEAM và ΔFCM, ta có:

$AM = CM$, vì M là trung điểm AC

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

do đó $\Delta EAM = \Delta FCM$ (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra:

$EM = FM$.

Trong tam giác ΔABM do $\hat{A}$ là góc tù nên ta có:

$AB < BM \Leftrightarrow AB < BE + EM$. (1)

$AB < BM \Leftrightarrow AB < BF - FM$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) và sử dụng kết quả $EM = FM$, ta được:

$2AB < BE + BF \Leftrightarrow AB < \frac{1}{2}(BE + BF)$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 3 QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC – BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

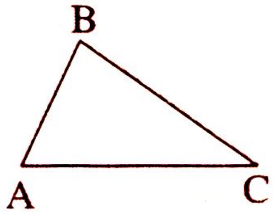
Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Tức là, với ΔABC ta luôn có:

$AB + BC > AC.$

$AB + AC > BC.$

$AC + BC > AB.$



2. HỆ QUẢ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Từ các bất đẳng thức tam giác, bằng phép chuyển vế ta suy ra

$AB > AC - BC.$ $\quad AC > AB - BC.$ $\quad BC > AC - AB.$

$AB > BC - AC.$ $\quad AC > BC - AB.$ $\quad BC > AB - AC.$

Như vậy, ta có kết quả: "*Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại*".

Từ bất đẳng thức tam giác và hệ quả của bất đẳng thức tam giác, ta nhận thấy trong ΔABC luôn có:

$|AC - BC| < AB < AC + BC$

$|AB - AC| < BC < AB + AC$

$|AB - BC| < AC < AB + BC$

Tức là, ta có kết quả đầy đủ hơn như sau:

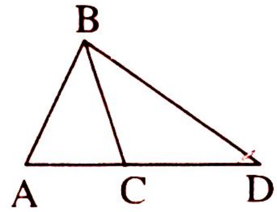
"Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Ví dụ 1: *Chứng minh bất đẳng thức tam giác.*

✍ *Giải*



Xét ΔABC, trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = CB. Ta có: $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$.

Mặt khác, ta lại có:

$CB = CD \Leftrightarrow \Delta CBD$ cân tại C $\Leftrightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB}$

Trong ΔABD, ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \widehat{CBD} < \widehat{ABD} \Leftrightarrow AB < AD = AC + CD$

$\Leftrightarrow AB < AC + CB$, đpcm.

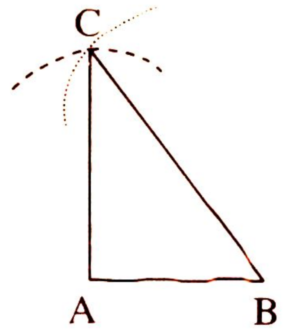
Vấn đề 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.*

a. 2cm, 4cm, 7cm. b. 2cm, 6cm, 4cm.

c. 3cm, 4cm, 5cm.

✍ *Giải*



a. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$2 + 4 < 7$.

b. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$2 + 4 = 6$.

c. Đây chính là độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$3 + 4 > 5$, $3 + 5 > 4$, $4 + 5 > 3$.

Giả sử cần dựng ΔABC, biết AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm, ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn AB = 3cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 4cm và cung tròn tâm B bán kính 5cm. Hai cung này cắt nhau tại C.

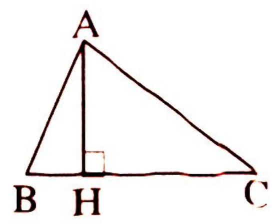
Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC cần dựng.

☛ ***Chú ý***:

1. Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại.
2. Kết quả trên có được nhờ vào một phương pháp khác để chứng minh bất đẳng thức tam giác, cụ thể:

   Trong ΔABC, giả sử BC là cạnh lớn nhất suy ra góc Â lớn nhất.

   Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$), ta lần lượt có nhận xét:



- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

  $BH < AB$. (1)

- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

  $CH < AC$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$BH + CH < AB + AC \Leftrightarrow BC < AB + AC.$$

Với giả sử BC là cạnh lớn nhất nên các bất đẳng thức còn lại là hiển nhiên.

Ví dụ 2: *Dựa vào hệ quả của bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.*

a. 1,2cm, 2,2cm, 1cm. b. 2cm, 3cm, 6cm.

b. 10cm, 12cm, 5cm.

✍ *Giải*

a. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$2,2 - 1,2 = 1.$

b. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$6 - 3 = 3 > 2.$

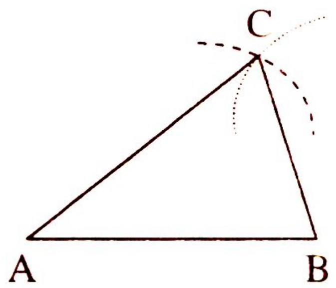
c. Đây chính là độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$12 - 10 < 5, \quad 12 - 5 < 4, \quad 10 - 5 < 12.$

Giả sử cần dựng ΔABC, biết AB = 10cm, AC = 12cm, BC = 5cm, ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn AB = 10cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 12cm và cung tròn tâm B bán kính 5cm. Hai cung này cắt nhau tại C.

Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC cần dựng.



☞ ***Chú ý:*** Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC có AB = 3cm, AC = 1cm.

a. *Hãy tìm độ dài cạnh* BC, *biết độ dài này là một số nguyên* (cm).

b. *Dựng* ΔABC.

✍ *Giải*

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được:

$$AB - AC < BC < AB + AC \Leftrightarrow 3 - 1 < BC < 3 + 1 \Leftrightarrow 2 < BC < 4$$

Do độ dài của BC là một số nguyên (cm) nên BC = 3cm.

b. *Học sinh tự làm.*

Ví dụ 4: *Tìm chu vi của tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là* 3,5cm *và* 7cm.

Giải

Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó:

AB không thể bằng 3,5cm vì trái lại ta có:

$$AB + AC = 7cm = BC$$

do đó:

$$AB = AC = 7cm; \qquad BC = 3{,}5cm$$

Khi đó, chu vi của tam giác được cho bởi:

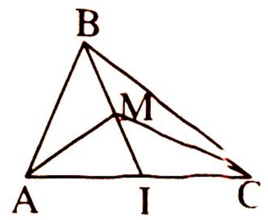
$$CV = AB + AC + BC = 7 + 7 + 3{,}5 = 17{,}5cm.$$

Ví dụ 5: *Cho ΔABC và M là một điểm nằm trong tam giác.*

a. *Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC. Chứng minh rằng* $MA + MB < IA + IB < CA + CB$.

b. *Chứng minh rằng* $MA + MB + MC$ *lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của* ΔABC.

Giải



a. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔAMI, ta có:

$$MA < IA + IM$$
$$\Leftrightarrow MA + MB < IA + IM + MB$$
$$\Leftrightarrow MA + MB < IA + IB. \qquad (1)$$

- Trong ΔBCI, ta có:

$$IB < CI + CB \Leftrightarrow IA + IB < IA + CI + CB$$
$$\Leftrightarrow IA + IB < CA + CB. \qquad (2)$$

Từ (1), (2), ta nhận được $MA + MB < IA + IB < CA + CB$, đpcm.

b. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔMAB, ta có:

$$MA + MB > AB. \qquad (3)$$

- Trong ΔMBC, ta có:

$$MB + MC > BC. \qquad (4)$$

- Trong ΔMAC, ta có:

$$MA + MC > AC. \qquad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được:

$$2(MA + MB + MC) > AB + BC + AC$$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC), \text{ đpcm.}$$

Mặt khác, dựa theo kết quả câu a), ta có:

$MA + MB < CA + CB.$ (6)

$MB + MC < AB + AC.$ (7)

$MA + MC < BA + BC.$ (8)

Cộng theo vế (6), (7), (8), ta được:

$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + AC)$

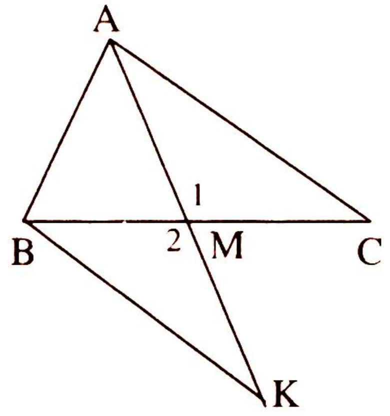
$\Leftrightarrow MA + MB + MC < AB + BC + AC$, đpcm.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC *và* M *là điểm nằm giữa* B *và* C.

a. *Chứng minh rằng* MA *nhỏ hơn nửa chu vi* ΔABC.

b. *Trong trường hợp* M *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng:*

$$MA < \frac{1}{2}(AB + AC).$$



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔMAB, ta có:

  $MA < AB + BM.$ (1)

- Trong ΔMAC, ta có:

  $MA < AC + CM.$ (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$2MA < AB + AC + BM + CM \Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(AB + AC + BC), \text{ đpcm.}$$

b. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AM = KM.

Xét hai tam giác ΔAMC và ΔKMB, ta có:

$AM = KM$

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

$CM = BM$, vì M là trung điểm BC

do đó $\Delta AMC = \Delta KMB$ suy ra $BK = AC$.

Trong ΔABK, ta có:

$$AK < AB + BK \Leftrightarrow 2MA < AB + AC \Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

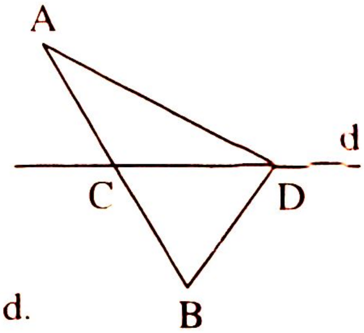
☞ ***Chú ý quan trọng***: Dựa vào bất đẳng thức tam giác chúng ta giải được một dạng bài toán cực trị " *Cho đường thẳng* d *và hai điểm* A, B *không thuộc* d. *Tìm trên đường thẳng* d *điểm* C *sao cho* CA + CB *nhỏ nhất* ". Đây chính là dạng toán rất quen thuộc trong các kì thi đại học. Phương pháp được tổng kết thông qua hai ví dụ sau.

Ví dụ 7: *Cho đường thẳng* d *và hai điểm* A, B *nằm về hai phía của đường thẳng* d. *Tìm trên đường thẳng d điểm* C *sao cho* CA + CB *nhỏ nhất.*

Giải

Gọi C là giao điểm của AB và d và D là điểm bất kì trên d (D ≠ C). Ta cần đi chứng minh:

CA + CB < DA + DB.



Thật vậy, trong ΔABD, ta luôn có:

AB < DA + DB ⇔ CA + CB < DA + DB.

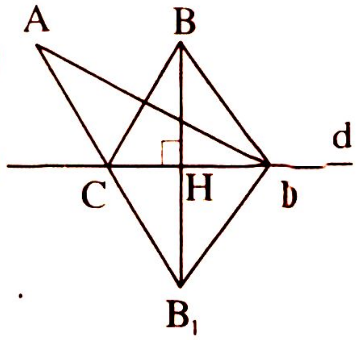
Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB và d.

Nhận xét: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B khác phía với đường thẳng d. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B cùng phía với đường thẳng d.

Ví dụ 8: *Cho đường thẳng* d *và hai điểm* A, B *nằm về một phía của đường thẳng* d. *Tìm trên đường thẳng* d *điểm* C *sao cho* CA + CB *nhỏ nhất.*

Giải

Kẻ BH vuông góc với d. Trên tia đối của tia HB lấy điểm B_1 sao cho BH = B_1H.



Gọi C là giao điểm của AB_1 và d và D là điểm bất kì trên d (D ≠ C). Ta cần đi chứng minh:

CA + CB < DA + DB.

Thật vậy, trong ΔAB_1D, ta luôn có:

$AB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1$. (1)

Nhận xét rằng:

- $\Delta HBC = \Delta HB_1C$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow CB = CB_1$. (2)
- $\Delta HBD = \Delta HB_1D$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow DB = DB_1$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được: CA + CB < DA + DB.

Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a. 3cm, 4cm, 8cm. b. 5cm, 8cm, 2cm. c. 6cm, 8cm, 9cm.

Bài 2.: Tìm chu vi của tam giác cân ΔABC biết độ dài hai cạnh của nó là:

a. 4cm và 9cm. b. 4cm và 6cm.

Bài 3.: Chứng minh rằng mỗi cạnh của tam giác bao giờ cũng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Bài 4.: Cho ΔABC có AB = 1cm, AC = 6cm.

a. Hãy tìm độ dài cạnh BC, biết độ dài này là một số nguyên (cm).

b. Lấy điểm D nằm giữa B và C. Chứng minh rằng AD < 6,5cm.

Bài 5.: Cho ΔABC có AB = 7cm, AC = 2cm.

a. Hãy tìm độ dài cạnh BC, biết độ dài này là một số nguyên lẻ (cm).

b. M là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$MA + MB + MC > 8cm.$$

Bài 6.: Cho ΔABC có AB < AC. Đường trung trực của BC cắt AC tại D. Gọi K là điểm bất kì khác D trên đường trung trực đó. So sánh chu vi các tam giác ΔKAB và ΔDAB.

Bài 7: Cho ΔABC có AB = c, AC = b (b > c), trung tuyến AM = m. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}(b - c) < m < \frac{1}{2}(b + c)$.

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả "*Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy*" - Kết quả này đã được trình bày trong cuốn Toán 7 tập 1.

Bài 8.: *

a. Cho hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $BC > B_1C_1$. Chứng minh rằng $\hat{A} > \hat{A}_1$.

b. Cho hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $\hat{A} > \hat{A}_1$. Chứng minh rằng $BC > B_1C_1$.

c. Áp dụng: Cho ΔABC có AB < AC, trung tuyến AM. Lấy điểm D bất kì trên tia đối của tia MA. So sánh độ dài CD và BD.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Học sinh tự dựng hình.*

a. Bộ 3cm, 4cm, 8cm không là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi:

$$3 + 4 = 7 < 8.$$

b. Bộ 5cm, 8cm, 2cm không là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi:

$$5 + 2 = 7 < 8.$$

c. Bộ 6cm, 8cm, 9cm là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi:

Cách 1: So sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại

$$6 + 8 = 14 > 9.$$

Cách 2: So sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại

$$9 - 8 = 1 < 6.$$

Bài 2:

a. Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó:

AB không thể bằng 4cm vì trái lại AB + AC = 8cm < BC

do đó:

AB = AC = 9cm, BC = 4cm

Khi đó, chu vi của tam giác được cho bởi:

CV = AB + AC + BC = 9 + 9 + 4 = 22cm.

b. Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu AB = AC = 4cm và BC = 6cm

Chu vi của tam giác được cho bởi:

CV = AB + AC + BC = 4 + 4 + 6 = 14cm.

Trường hợp 2: Nếu AB = AC = 6cm và BC = 4cm

Chu vi của tam giác được cho bởi:

CV = AB + AC + BC = 6 + 6 + 4 = 16cm.

Bài 3: Giả sử tam giác có ba cạnh là a, b, c, ta cần đi chứng minh:

$$a < \frac{1}{2}(a + b + c), \qquad b < \frac{1}{2}(a + b + c), \qquad c < \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Thật vậy, ta luôn có:

$$a < b + c \Leftrightarrow a + a < a + b + c \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}(a + b + c), \text{ đpcm.}$$

Các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài 4:

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được:

$$AC - AB < BC < AC + AB \Leftrightarrow 6 - 1 < BC < 6 + 1 \Leftrightarrow 5 < BC < 7$$

Do độ dài của BC là một số nguyên (cm) nên BC = 6cm.

b. Dựa vào kết quả:

$$MA < \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(1 + 6 + 6) \Leftrightarrow MA < 6{,}5\text{cm.}$$

Bài 5:

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được:

$$AC - AB < BC < AC + AB \Leftrightarrow 7 - 2 < BC < 7 + 2 \Leftrightarrow 5 < BC < 9$$

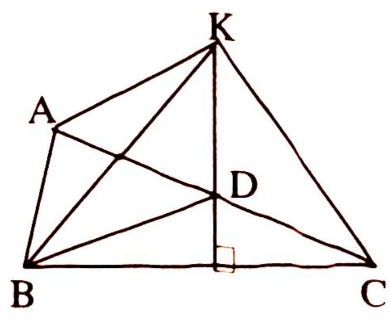
Do độ dài của BC là một số nguyên lẻ (cm) nên BC = 7cm.

b. Dựa vào kết quả:

$$MA + MB + MC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC > \frac{1}{2}(2 + 7 + 7)$$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC > 8\text{cm.}$$



Bài 6: Trước hết, vì D, K thuộc trung trực của BC nên:

$BD = CD$ và $BK = CK$.

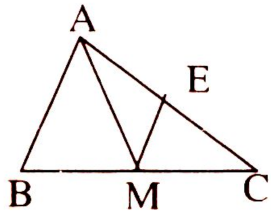
Trong ΔACK, ta có:

$AC < AK + CK$.

Khi đó:

$$CV_{\Delta DAB} = AB + AD + DB = AB + AD + CD = AB + AC$$
$$< AB + AK + CK = AB + AK + BK = CV_{\Delta KAB}.$$

Bài 7: Gọi E là trung điểm AC, suy ra:



$$ME = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}.$$

Xét ΔAEM, ta có:

$$AE - ME < AM < AE + ME$$

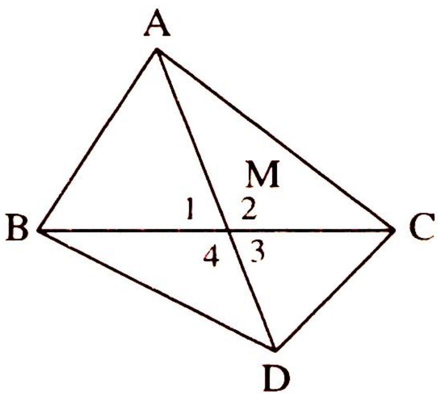
$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} - \frac{c}{2} < m < \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(b - c) < m < \frac{1}{2}(b + c).$$

Bài 8:

a. Tham khảo cuốn ***Các bài toán THCS chọn lọc*** - Lê Hồng Đức.

b. Tham khảo cuốn ***Các bài toán THCS chọn lọc*** - Lê Hồng Đức.

c. Ta lần lượt nhận thấy:



- Với hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:

  $MB = MC$, vì M là trung điểm BC

  AM chung

  $AB < AC$

do đó:

$$\hat{M}_1 < \hat{M}_2 \Leftrightarrow \hat{M}_3 < \hat{M}_4.$$

- Với hai tam giác ΔBDM và ΔCDM, ta có:

  $MB = MC$, vì M là trung điểm BC

  DM chung

  $\hat{M}_3 < \hat{M}_4$

do đo $CD < BD$.

☛ ***Chú ý:*** Vận dụng kết quả của định lí trong các câu a), b) các em học sinh hãy thực hiện thêm bài tập sau:

Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} > \widehat{MCA}$. So sánh $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MAC}$.

CHỦ ĐỀ 4 # TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của ΔABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của ΔABC. Đôi khi, đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của ΔABC.
- Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đã có được các kết quả:

- Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.
- Trong tam giác cân đường trung tuyến ứng với cạnh đáy thì cũng là đường cao, đường phân giác, đường trung trực.

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

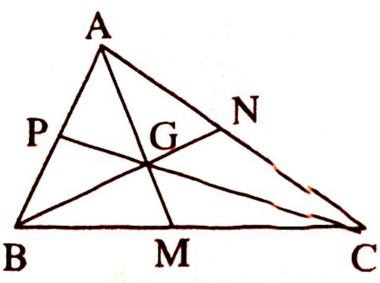
Ta có kết quả:

" Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy ".

Như vậy, trong ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP cùng đi qua điểm G (hay còn gọi là đồng quy tại điểm G, điểm G gọi là trọng tâm ΔABC) và ta có:

$$\frac{GA}{AM} = \frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}.$$

Điểm G gọi là trọng tâm của ΔABC.



☞ ***Nhận xét***:

1. Từ kết quả trên ta suy ra được (AM, BN, CP là các trung tuyến):

$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GP} = 2; \qquad \frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{CP} = \frac{1}{3}.$$

2. Trọng tâm G của ΔABC luôn ở bên trong tam giác.
3. Để xác định trọng tâm G của ΔABC ta có thể sử dụng một trong hai cách:

Cách 1: Kẻ hai trung tuyến, và khi đó giao điểm của chúng là trọng tâm G.

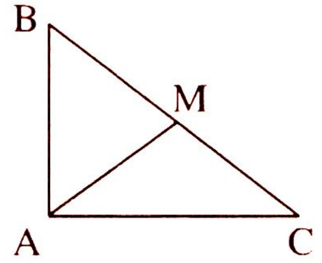
Cách 2: Kẻ một trung tuyến (giả sử AM), trên đoạn AM lấy điểm G sao cho GA = 2GM (hoặc $GM = \frac{1}{2}GA$ hoặc $GM = \frac{1}{3}AM$ hoặc $GA = \frac{2}{3}AM$) và khi đó G là trọng tâm ΔABC.

4. Nếu G là trọng tâm ΔABC thì các tia AG, BG, CG sẽ cắt cạnh đối diện tại trung điểm của mỗi cạnh.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 3cm, AC = 4cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM.*

Giải



Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

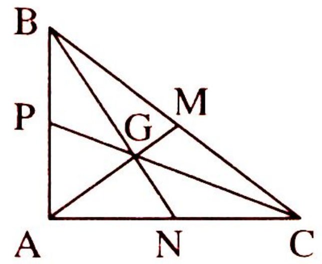
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm.$$

Khi đó:

$$AM = \frac{1}{2}BC = 2,5cm.$$

Ví dụ 2: *Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 6cm, AC = 8cm. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của ΔABC tới các đỉnh A, B, C.*

Giải



Ta lần lượt có:

- Trong ΔABC vuông tại A, suy ra:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$
$$\Leftrightarrow BC = 10cm.$$

Ta có:

$$GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}.10 = \frac{10}{3}\text{ cm}.$$

- Trong ΔABN vuông tại A, suy ra:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \Leftrightarrow BN = \sqrt{52}\text{ cm}.$$

Khi đó:

$$GB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{52} = \frac{2\sqrt{52}}{3}\text{ cm}.$$

- Trong ΔACP vuông tại A, suy ra:

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \Leftrightarrow CP = \sqrt{73}\text{ cm}.$$

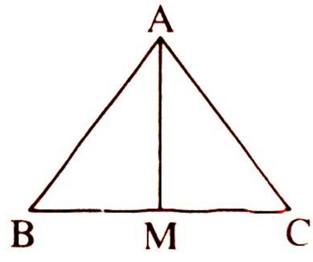
Khi đó: $GC = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}\sqrt{73} = \frac{2\sqrt{73}}{3}$ cm.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *cân tại* A *có* AB = AC = 5cm, BC = 8cm. *Kẻ trung tuyến* AM.

a. *Chứng minh rằng* $AM \perp BC$.

b. *Tính độ dài trung tuyến* AM.

✍ *Giải*



a. Xét hai tam giác ΔMAB và ΔMAC, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

MB = MC, vì M là trung điểm BC

AM chung

do đó $\Delta MAB = \Delta MAC$, suy ra:

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMC}.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{AMB} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90^0$$

$\Leftrightarrow AM \perp BC$, đpcm.

b. Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$$BM = \frac{1}{2}BC = 4cm, \text{ vì M là trung điểm BC}$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow AM = 3cm.$$

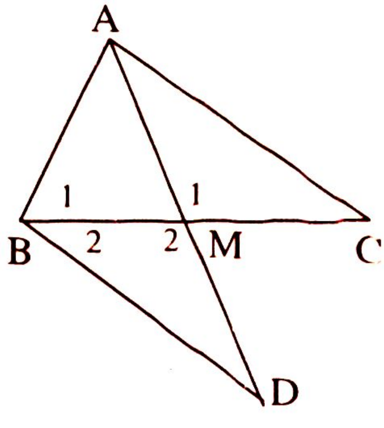
Vậy, ta được AM = 3cm.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC, *trung tuyến* AM. *Trên tia đối của tia* AM *lấy điểm* D *sao cho* MA = MD.

a. *Chứng minh rằng* BD = AC.

b. *Nêu cách dựng* ΔABC *khi biết độ dài* AB, AC *và trung tuyến* AM *của nó*.

✍ *Giải*



a. Xét hai tam giác ΔAMC và ΔDMB, ta có:

AM = DM

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

CM = BM, vì M là trung điểm BC

do đó $\Delta AMC = \Delta DMB$ suy ra AC = BD.

b. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài AB, AC và trung tuyến AM ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔABD khi biết độ dài ba cạnh, với:

  AB, BD = AC, AD = 2AM.

- Lấy M là trung điểm AD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

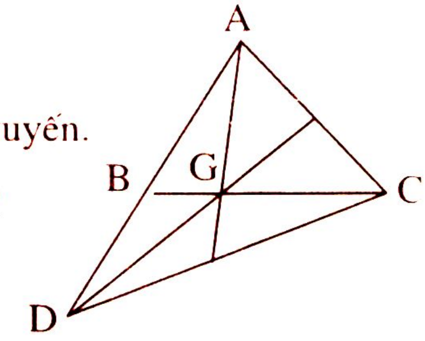
Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC. *Trên tia đối của tia* BA *lấy điểm* D *sao cho* BD = BA. *Trên cạnh* BC *lấy điểm* G *sao cho* $BG = \frac{1}{3}BC$.

a. *Chứng minh rằng* G *là trọng tâm* ΔACD.

b. *Chứng tỏ rằng* AG, DG *theo thứ tự cắt các cạnh* CD, AC *tại trung điểm của chúng.*

Giải



a. Trong ΔACD, ta có nhận xét rằng:

- Vì B là trung điểm của AD nên CB là trung tuyến.
- Vì điểm G thuộc BC thoả mãn $BG = \frac{1}{3}BC$

nên G là trọng tâm ΔACD.

b. Vì G là trọng tâm ΔACD nên:

- AG là đường trung tuyến, do đó AG cắt CD tại trung điểm của CD.
- DG là đường trung tuyến, do đó DG cắt AC tại trung điểm của AC.

Chú ý: Chúng ta có các kết quả:

- Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.
- Trong một tam giác đều cạnh bằng a, độ dài ba đường trung tuyến bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

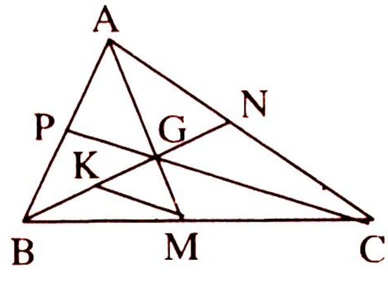
Các kết quả trên sẽ được chứng minh trong phần các ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC *các trung tuyến* AM, BN, CP, *trọng tâm* G. *Gọi* K *là trung điểm của* GB.

a. *Chứng minh rằng các cạnh của* ΔGMK *bằng* $\frac{1}{3}$ *các trung tuyến của* ΔABC.

b. *Nêu cách dựng* ΔABC *khi biết độ dài ba trung tuyến* AM, BN, CP *của nó.*

Giải



a. Với các cạnh của ΔGMK, ta lần lượt có:

$GM = \frac{1}{3}AM$, theo tính chất.

$$GK = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BN = \frac{1}{3}BN.$$

$$KM = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}CP.$$

Vậy, các cạnh của ΔGMK bằng $\frac{1}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

b. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔGKM khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GM = \frac{1}{3}AM,\ GK = \frac{1}{3}BN,\ KM = \frac{1}{3}CP.$$

- Trên tia đối của tia GM lấy điểm A sao cho AG = 2GM.
- Trên tia đối của tia KG lấy điểm B sao cho BK = GK.
- Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho CM = BM.

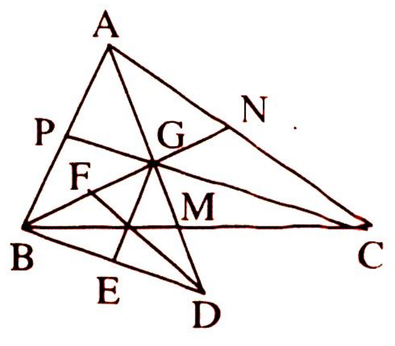
Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Ví dụ 7: *Cho ΔABC các trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Trên tia AM lấy điểm D sao cho G là trung điểm của AD.*

a. *Chứng minh rằng các cạnh của ΔBGD bằng $\frac{2}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.*

b. *Chứng minh rằng các đường trung tuyến của ΔBGD bằng $\frac{1}{2}$ các cạnh của ΔABC.*

c. *Nêu cách dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP của nó.*



Giải

a. Với các cạnh của ΔBGD, ta lần lượt có:

$GD = GA = \frac{2}{3}AM$, theo tính chất.

$GB = \frac{2}{3}BN$, theo tính chất.

BD = GC, vì ΔMBD = ΔMCG (c.g.c)

$\Rightarrow BD = \frac{2}{3}CP.$

Vậy, các cạnh của ΔBGD bằng $\frac{2}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

b. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BD, BG, suy ra BM, GE, DF là các đường trung tuyến của ΔBGD.

Ta có:

$BM = \frac{1}{2}BC$, vì M là trung điểm BC.

$GE = \frac{1}{2}AB$, vì G, E theo thứ tự là trung điểm của AD, BD.

$DF = AN$, vì $\Delta DFG = \Delta ANG$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = \frac{1}{2}AC$.

Vậy, các đường trung tuyến của ΔBGD bằng $\frac{1}{2}$ các cạnh của ΔABC.

c. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔGBD khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GD = \frac{2}{3}AM,\ GB = \frac{2}{3}BN,\ BD = \frac{2}{3}CP.$$

- Trên tia đối của tia GD lấy điểm A sao cho AG = GD.
- Lấy M là trung điểm GD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

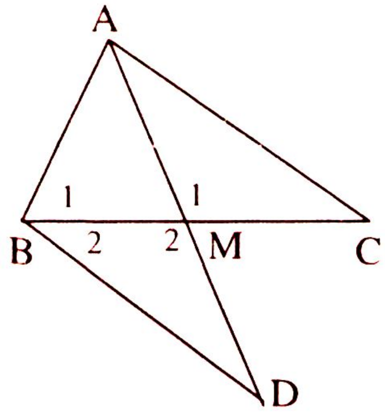
Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *trung tuyến* AM. *Trên tia đối của tia* AM *lấy điểm* D *sao cho* MA = MD.

a. *Chứng minh rằng* ΔABD *vuông.*

b. *Chứng minh rằng* $\Delta ABC = \Delta ABD$.

c. *So sánh* AM *và* BC.



✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác ΔAMC và ΔDMB, ta có:

AM = DM

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, vì đối đỉnh

CM = BM, vì M là trung điểm BC

do đó $\Delta AMC = \Delta DMB$ suy ra:

$\hat{C} = \hat{B}_2$ và AC = BD.

Khi đó:

$\widehat{ABD} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C} = 90^0 \Leftrightarrow \Delta ABD$ vuông tại B.

b. Xét hai tam giác vuông ΔABC và ΔABD, ta có:

AB chung

AC = BD, chứng minh trên

do đó $\Delta ABC = \Delta ABD$ (hai cạnh góc vuông), đpcm.

c. Từ kết quả câu b), suy ra:

$$BC = AD = 2AM \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$$

☞ ***Nhận xét***:

- Ví dụ trên cho chúng ta thêm một phương pháp chứng minh rằng "*Trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền*".
- Tất nhiên, điều ngược lại cũng đúng, tức là "*Một tam giác có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng thì tam giác đó là tam giác vuông*". Ví dụ sau sẽ giúp chúng ta chứng minh nhận định này.

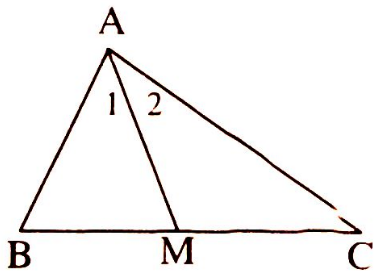
Ví dụ 9: *Cho* ΔABC, *trung tuyến* AM *bằng nửa cạnh* BC. *Chứng minh rằng* ΔABC *vuông tại* A.

✍ *Giải*

Từ giả thiết, ta nhận được:

$$AM = BM = CM$$

suy ra:



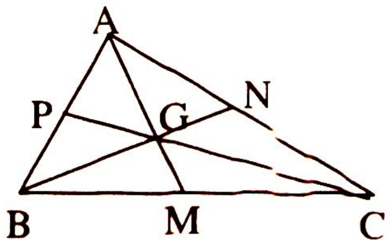
- ΔABM cân tại M $\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$.
- ΔACM cân tại M $\Leftrightarrow \hat{C} = \hat{A}_2$.

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Ví dụ 10: *Cho* ΔABC *có* AB = c, AC = b, BC = a, *các trung tuyến* AM, BN, CP. *Chứng minh rằng*:



a. $BN + CP > \frac{3a}{2}$.

b. $\frac{1}{2}(b - c) < AM < \frac{1}{2}(b + c)$.

c. $\frac{3}{4}(a + b + c) < AM + BN + CP < a + b + c$.

✍ *Giải*

a. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Trong ΔGBC, ta có:

$$GB + GC > BC \Leftrightarrow \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > a \Leftrightarrow BN + CP > \frac{3a}{2}, \text{ đpcm.} \quad (1)$$

b. Vì M, N theo thứ tự là trung điểm BC, AC nên: $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Xét ΔAMN, ta có:

$$AN - MN < AM < AN + MN$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} - \frac{c}{2} < AM < \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(b - c) < AM < \frac{1}{2}(b + c). \quad (2)$$

c. Ta lần lượt sử dụng:

- Phương pháp chứng minh như trong câu a), ta cũng có:

$$AM + CP > \frac{3b}{2}. \quad (3)$$

$$AM + BN > \frac{3c}{2}. \quad (4)$$

Cộng theo vế (1), (3), (4), ta được :

$$2(AM + BN + CP) > \frac{3}{2}(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow AM + BN + CP > \frac{3}{4}(a + b + c), \text{ đpcm.}$$

- Phương pháp chứng minh như trong câu b), ta cũng có:

$$BN < \frac{1}{2}(a + c). \quad (5)$$

$$CP < \frac{1}{2}(a + b). \quad (6)$$

Cộng theo vế (2), (5), (6), ta được :

$$AM + BN + CP < \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c) \Leftrightarrow AM + BN + CP < a + b + c, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 11: *Chứng minh rằng:*

a. *Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.*

b. *Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.*

Giải

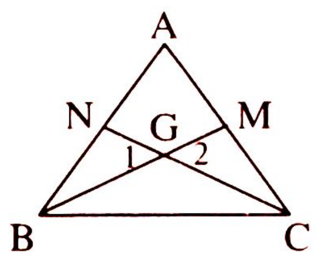
a. Giả sử ΔABC cân tại A, ta cần đi chứng minh hai trung tuyến BM = CN.

Thật vậy, xét hai tam giác ΔABM và ΔCAN, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\hat{A}$ chung

$$AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = AN$$



do đó:

$\Delta ABM = \Delta CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ BM = CN, đpcm.

b. Giả sử ΔABC có hai trung tuyến BM = CN ta cần đi chứng minh ΔABC cân tại A.

Thật vậy, xét hai tam giác ΔBGN và ΔCGM, ta có:

$$GB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}CN = GC.$$

$\hat{G}_1 = \hat{G}_2$, vì đối đỉnh

$$GN = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{3}BM = GM.$$

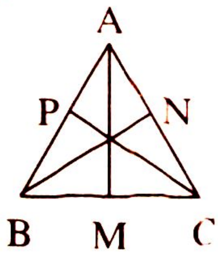
do đó $\Delta BGN = \Delta CGM$ (c.g.c), suy ra:

$$BN = CM \Leftrightarrow 2BN = 2CM \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A, đpcm.}$$

Ví dụ 12: *Chứng minh rằng " Trong một tam giác đều cạnh bằng a, độ dài ba đường trung tuyến bằng nhau và bằng* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ".

Giải

Giả sử ΔABC đều có các trung tuyến AM, BN, CP, khi đó:



- Vì ΔABC cân tại A nên BN = CP và $AM \perp BC$.
- Vì ΔABC cân tại B nên AM = CP.

Suy ra AM = BN = CP.

Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ đều}$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với ΔABC đều cạnh bằng a ta có $AM = BN = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp chứng minh tính chất ba đường trung tuyến của tam giác dựa vào kết quả " *Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy* ".

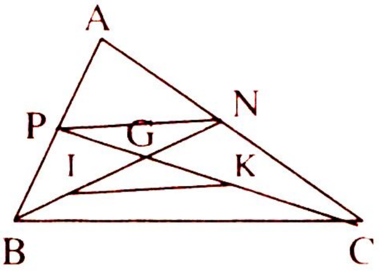
Ví dụ 13: *Cho* ΔABC, *hai trung tuyến* BN *và* CP *cắt nhau tại* G. *Chứng minh rằng* $\frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có nhận xét:

- Vì P, N theo thứ tự là trung điểm AB, AC nên:

$$PN \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC.$$



- Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm GB, GC nên:

$$IK \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC.$$

Từ đó ta thấy ΔGIK = ΔGNP (g.c.g), suy ra:

$$GN = GI = \frac{1}{2}BG \Leftrightarrow GB = \frac{2}{3}BN \Leftrightarrow \frac{GB}{BN} = \frac{2}{3}. \quad (1)$$

$$GP = GK = \frac{1}{2}CG \Leftrightarrow GC = \frac{2}{3}CP \Leftrightarrow \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$, đpcm.

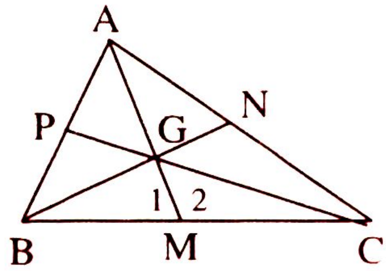
☞ **Yêu cầu**:

1. Các em học sinh hãy giải thích tại sao từ kết quả trên chúng ta nhận được tính chất của ba đường trung tuyến trong tam giác.
2. Thực hiện bài toán "*Cho ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔMNP*".

Ví dụ 14: *Chứng minh rằng trong một tam giác, trung tuyến ứng với cạnh lớn thì nhỏ hơn trung tuyến ứng với cạnh nhỏ.*

✍ *Giải*

Xét ΔABC các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Giả sử AB < AC ta cần đi chứng minh CP > BN. Thật vậy:



- Với hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:
  MB = MC, vì M là trung điểm BC
  AM chung
  AB < AC

do đó $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$.

- Với hai tam giác ΔGBM và ΔGCM, ta có:
  MB = MC, vì M là trung điểm BC
  GM chung
  $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$

do đó: $GB < GC \Leftrightarrow \frac{2}{3}GB < \frac{2}{3}GC \Leftrightarrow BN < CP$, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Ví dụ trên đã nêu ra một tính chất khác của ba đường trung tuyến của tam giác.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC cân tại A có AB = AC = 10cm, BC = 12cm. Kẻ trung tuyến AM.

a. Chứng minh rằng $AM \perp BC$.

b. Tính độ dài trung tuyến AM.

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 12cm, AC = 16cm và trọng tâm G. Tính tổng GA + GB + GC.

Bài 3: Cho ΔABC có AB = 9cm, AC = 12cm, BC = 15cm và trọng tâm G.

a. Chứng minh rằng ΔABC vuông.

b. Tính tổng GA + GB + GC.

Bài 4: Cho ΔABC có AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 14cm, các đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

a. BN + CP > 21cm. b. AM + BN + CP > 24cm.

Bài 5: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.

Bài 6: Cho ΔABC đều cạnh a. Chứng minh rằng $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 7: Cho ΔABC. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = BE. Trên tia đối của tia CB lấy điểm H sao cho CH = CD. Chứng minh rằng:

a. ME = MH.

b. Ba điểm K, D, M thẳng hàng.

Bài 8: Cho ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G.

a. Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔMNP.

b. Gọi I là giao điểm của NP với AM. So sánh độ dài AI và IG.

Bài 9: * Chứng minh rằng mỗi trung tuyến của tam giác nhỏ hơn tổng hai trung tuyến còn lại.

Bài 10: Dựng ΔABC khi biết:

a. AB = 3cm, AC = 4cm và trung tuyến AM = 2,5cm.

b. AB = 5cm, AC = 5cm và trung tuyến AM = 4cm.

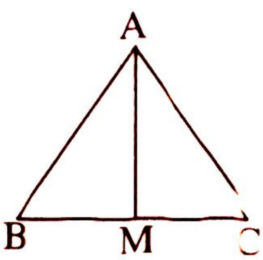
c. AB = 6cm, AC = 8cm và trung tuyến AM = 6cm.

Bài 11: Dựng ΔABC, biết độ dài ba đường trung tuyến của nó bằng:

a. 6cm, 6cm, 9cm. b. 3cm, 4cm, 5cm.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:



a. *Học sinh tự làm.*

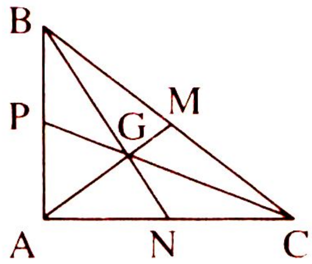
b. Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$$BM = \frac{1}{2}BC = 6cm, \text{ vì M là trung điểm BC}$$

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AM = 8cm.$

Vậy, ta được AM = 8cm.

Bài 2: Ta lần lượt có:



- Trong ΔABC vuông tại A, suy ra:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$$
$$\Leftrightarrow BC = 20cm.$$

Ta có:

$$GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}.20 = \frac{20}{3}\text{ cm.}$$

- Trong ΔABN vuông tại A, suy ra:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \Leftrightarrow BN = \sqrt{208}\text{ cm.}$$

Khi đó:

$$GB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{208} = \frac{2\sqrt{208}}{3}\text{ cm.}$$

- Trong ΔACP vuông tại A, suy ra:

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 = 16^2 + 6^2 = 292 \Leftrightarrow CP = \sqrt{292}\text{ cm.}$$

Khi đó: $GC = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}\sqrt{292} = \frac{2\sqrt{292}}{3}$ cm.

Suy ra:

$$GA + GB + GC = \frac{20}{3} + \frac{2\sqrt{208}}{3} + \frac{2\sqrt{292}}{3} = \frac{2}{3}(10 + \sqrt{208} + \sqrt{292}).$$

Bài 3:

a. Trong ΔABC, nhận xét rằng:

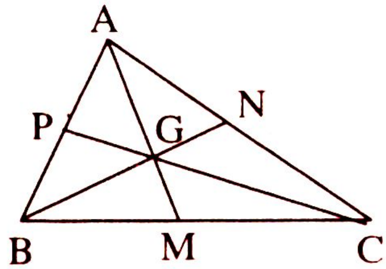
$$AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 = 15^2 = BC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

b. *Học sinh tự làm* -Tương tự bài tập 2.

Bài 4:

a. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Trong ΔGBC, ta có:



$$GB + GC > BC \Leftrightarrow \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > BC$$

$$\Leftrightarrow BN + CP > \frac{3BC}{2} = 21cm, \text{ đpcm.} \quad (1)$$

b. Sử dụng cách chứng minh như trong câu a), ta cũng có:

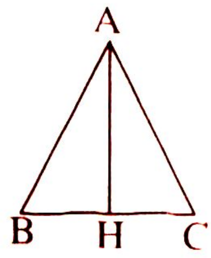
$$AM + CP > \frac{3AC}{2} = 15. \quad (2)$$

$$AM + BN > \frac{3AB}{2} = 12. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được :

$$2(AM + BN + CP) > 21 + 15 + 12 \Leftrightarrow AM + BN + CP > 24, \text{ đpcm.}$$

Bài 5:



a. Trong ΔABC, ta có:

- Vì AH là đường cao nên $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$.
- Vì AH là trung tuyến nên HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

$$HB = HC;\ \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0;\ AH \text{ chung}$$

suy ra:

$$\Delta AHB = \Delta AHC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

b. Ta có nhận xét:

- Vì ΔABC cân tại A nên AB = AC và $\hat{B} = \hat{C}$.
- Vì AH là trung tuyến nên HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

$$AB = AC; \qquad \hat{B} = \hat{C}; \qquad HB = HC$$

suy ra $\Delta AHB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$.

Mặt khác:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{H}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0 \Leftrightarrow \text{AH là đường cao}$$

Bài 6: Giả sử ΔABC có các trung tuyến AM, BN, CP, khi đó:

$$AM = BN = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow GA = GB = GC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 7: *Hướng dẫn* (Học sinh tự vẽ hình)

a. Nhận xét rằng:

- Vì D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AB nên DE // AC.
- Vì CM // DE và C là trung điểm DH nên M là trung điểm của EH.

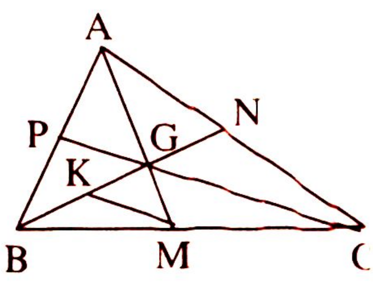
b. Trong ΔKEH, ta có:

- KM là một trung tuyến
- D là trọng tâm

do đó K, D, M thẳng hàng.

Bài 8: *Học sinh tự làm.*

Bài 9: Gọi K là trung điểm của GB.



Xét ΔGMK:

- Với các cạnh của ΔGMK, ta lần lượt có:

$$GM = \frac{1}{3}AM, \text{ theo tính chất.}$$

$$GK = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BN = \frac{1}{3}BN.$$

$$KM = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}CP.$$

- Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$GM < GK + KM \Leftrightarrow 3GM < 3GK + 3KM \Leftrightarrow AM < BN + CP.$$

Các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài 10: *Học sinh tự vẽ hình theo cách dựng.*

a. Ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔABD khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$AB = 3cm,\ BD = 4cm,\ AD = 5cm.$$

- Lấy M là trung điểm AD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Bài 11: Giả sử ΔABC có các đường trung tuyến, trọng tâm G. Gọi K là trung điểm của GB.

a. Với AM = BN = 6cm, CP = 9cm .Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔGKM khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GM = \frac{1}{3}AM = 2cm,\ GK = \frac{1}{3}BN = 2cm,\ KM = \frac{1}{3}CP = 3cm.$$

- Trên tia đối của tia GM lấy điểm A sao cho AG = 2GM.
- Trên tia đối của tia KG lấy điểm B sao cho BK = GK.
- Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho CM = BM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔGBD khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GD = \frac{2}{3}AM = 4cm,\ GB = \frac{2}{3}BN = 4cm,\ BD = \frac{2}{3}CP = 6cm.$$

- Trên tia đối của tia GD lấy điểm A sao cho AG = GD.
- Lấy M là trung điểm GD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

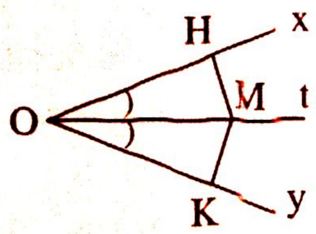
CHỦ ĐỀ 5

TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CÁC ĐIỂM THUỘC TIA PHÂN GIÁC

***Định lí thuận**: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.*



Như vậy, với góc xOy có tia phân giác Ot thì

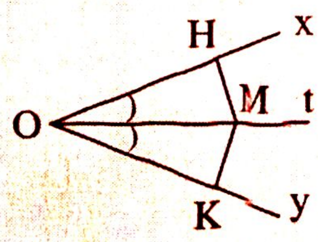
$M \in Ot \Rightarrow kc(M, Ox) = kc(M, Oy)$

$\Rightarrow MH = MK.$

☛ ***Nhận xét**:* Từ kết quả của định lí trên gợi ý cho chúng ta giải bài toán "*Tìm điểm M thuộc hình (H) cách đều hai cạnh của một góc* $\widehat{xOy}$ *cho trước*", bởi khi đó M chính là giao điểm của (H) với tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

2. ĐỊNH LÍ ĐẢO

***Định lí đảo**: Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.*



Như vậy, với góc xOy và điểm M sao cho

$kc(M, Ox) = kc(M, Oy) \Rightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy}$

$\Rightarrow$ OM là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Từ hai định lí trên, ta có:

" Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó ".

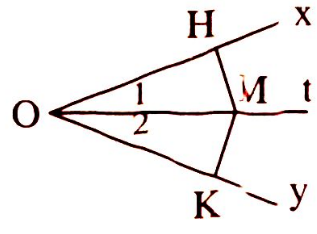
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Ví dụ 1: *Cho góc* xOy *khác góc bẹt. Trên tia phân giác* Ot *của góc* xOy *lấy điểm* M *bất kì. Chứng minh rằng điểm* M *cách đều* Ox *và* Oy.

✍ *Giải*

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên Ox và Oy. Ta cần đi chứng minh MH = MK.



Thật vậy, xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, có:

OM chung

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là phân giác

do đó:

ΔOMH = ΔOMK (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow$ MH = MK, đpcm.

Ví dụ 2: *Cho điểm M nằm bên trong góc $\widehat{xOy}$ và cách đều hai cạnh của góc này. So sánh số đo của hai góc $\widehat{MOx}$ và $\widehat{MOy}$.*

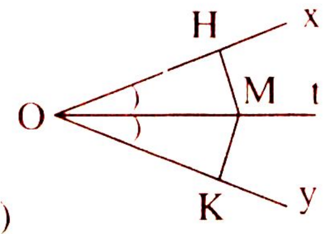
✍ *Giải*

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên Ox và Oy. Theo giả thiết ta có MH = MK.

Xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, ta có:

OM chung

MH = MK



do đó:

ΔOMH = ΔOMK (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{MOH} = \widehat{MOK} \Leftrightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy}$

⇒ M thuộc tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vấn đề 2: CHỨNG MINH MỘT TIA LÀ TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Vẽ* ΔDBC *vuông cân tại* D *ở phía ngoài* ΔABC. *Chứng minh rằng* AD *là tia phân giác của góc* A.

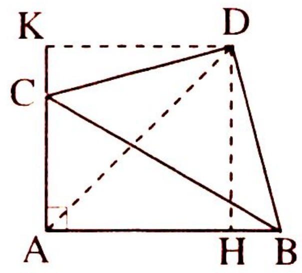
✍ *Giải*

Kẻ DH ⊥ AB, DK ⊥ AC.

Xét hai tam giác vuông ΔDHB và ΔDKC, ta có:

DB = DC, vì ΔDBC cân tại D

$\widehat{HDB} = \widehat{KDC}$, chúng là hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc



do đó ΔDHB = ΔDKC (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra:

DH = DK ⇔ AD là tia phân giác của góc A.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh tia Ot là phân giác của góc xOy chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $\widehat{tOx} = \widehat{tOy}$.

Cách 2: Lấy điểm M trên Ot, kẻ MH ⊥ Ox, MK ⊥ Oy. Ta đi chứng minh MH = MK.

Vấn đề 3: DỰNG TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Ví dụ 1: *Cho góc* xÔy. *Lấy các điểm* A, B *thuộc* Ox *sao cho* OA > OB. *Lấy các điểm* C, D *thuộc* Oy *sao cho* OC = OA *và* OD = OB. *Gọi* E *là giao điểm của* AD *và* BC. *Chứng minh rằng*:

a. AD = BC.

b. ΔABE = ΔCDE.

c. OE *là tia phân giác của góc* $\widehat{xOy}$.

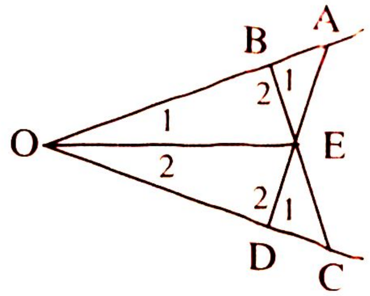
✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:

OA = OC, giả thiết

Ô chung

OD = OB, giả thiết



suy ra:

ΔOAD = ΔOCB (c.g.c) ⇒ AD = BC.

b. Xét hai tam giác ΔABE và ΔCDE, ta có:

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

AB = OA – OB = OC – OD = CD, dựa theo giả thiết

$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - \hat{D}_2 = \hat{D}_1$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra:

ΔABE = ΔCDE (g.c.g)

c. Xét hai tam giác ΔAOE và ΔCOE, ta có:

OA = OC, giả thiết

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

AE = CE, theo kết quả câu b)

suy ra:

ΔAOE và ΔCOE (c.g.c) ⇒ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ⇔ OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

☞ ***Nhận xét***: Ví dụ trên, chỉ ra cho chúng ta một phương pháp để dựng tia phân giác của góc xÔy, cụ thể ta thực hiện:

Bước 1: Lấy các điểm A, B thuộc Ox. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA và OD = OB.

Bước 2: Xác định giao điểm I của AD và BC. Khi đó OI chính là tia phân giác của góc xOy.

Vấn đề 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *nhọn. Tìm điểm* D *thuộc trung tuyến* AM *sao cho* D *cách đều hai cạnh của góc* B.

✍ *Giải*

Ta thấy ngay, điểm D phải tìm là giao điểm của trung tuyến AM với tia phân giác góc B.

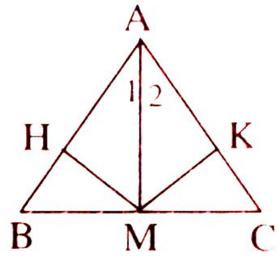
Ví dụ 2: *Cho* ΔABC. *Chứng minh rằng:*

a. *Nếu đường trung tuyến* AM *đồng thời là đường phân giác của góc* Â *thì* ΔABC *cân tại* A.

b. *Nếu* ΔABC *cân tại* A *thì đường trung tuyến* AM *cũng đồng thời là đường phân giác của góc* Â.

✍ *Giải*

a. Kẻ MH ⊥ AB, MK ⊥ AC.



Vì AM là phân giác góc $\hat{A}$ nên MH = MK.

Xét hai tam giác vuông ΔHBM và ΔKCM, ta có:

MH = MK

BM = CM, vì AM là trung tuyến

suy ra:

ΔHBM = ΔKCM (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A.

b. Xét hai tam giác ΔAMB và ΔAMC, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\hat{B} = \hat{C}$, vì ΔABC cân tại A

MB = MC, vì AM là trung tuyến

suy ra:

ΔAMB = ΔAMC (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

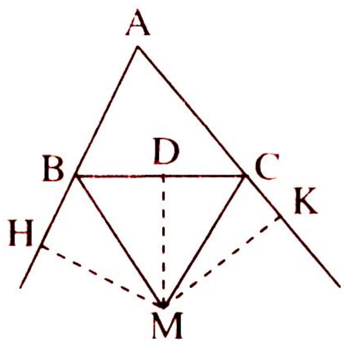
$\Leftrightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

☞ ***Nhận xét***: Câu a) còn có thể được chứng minh bằng cách lấy điểm A_1 trên tia AM sao cho $MA = MA_1$ – *Đề nghị các em học sinh thực hiện theo cách này.*

Ví dụ 3: *Cho ΔABC. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc $\hat{A}$ cùng đi qua một điểm.*

✍ *Giải*

Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C. Ta cần đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\hat{A}$.



Thật vậy, kẻ MH ⊥ AB, MD ⊥ BC, MK ⊥ AC, suy ra:

MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C.

suy ra:

MH = MK $\Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện thí dụ trên chúng đã sử dụng cả định lí thuận và định lí đảo.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai đường thẳng xx_1, yy_1 cắt nhau tại O.

a. Chứng minh hai tia phân giác Ot, Ot_1 của một cặp góc kề bù tạo thành một góc vuông.

b. Chứng minh rằng nếu M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot_1 thì M cách đều hai đường thẳng xx_1 và yy_1.

c. Chứng minh rằng nếu điểm cách đều hai đường thẳng xx_1 và yy_1 thì M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot_1.

d. Hãy đưa ra nhận xét về tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx_1, yy_1

Bài 2: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AM đồng thời là đường phân giác của góc $\hat{A}$ thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường cao AM cũng đồng thời là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

Bài 3: Cho ΔABC. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc B và C và phân giác của góc $\hat{A}$ cùng đi qua một điểm.

Bài 4: Cho ΔABC, đường cao AH. Vẽ điểm D sao cho AB là đường trung trực của HD. Vẽ điểm E sao cho AC là đường trung trực của HE. Giả sử DE cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Chứng minh rằng:

a. IB là tia phân giác của góc $\widehat{HID}$.

b. KC là tia phân giác của góc $\widehat{HKE}$.

c. HA là tia phân giác của góc $\widehat{IHK}$.

d. IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$, từ đó suy ra IC vuông góc với AB.

e. KB là tia phân giác của góc $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Học sinh tự làm.*

Bài 2:

a. Xét hai tam giác vuông ΔABM và ΔACM, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_1$, vì AM là phân giác góc $\hat{A}$

AM chung

suy ra:

ΔHBM = ΔKCM (góc nhọn - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A.

b. Xét hai tam giác vuông ΔAMB và ΔAMC, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

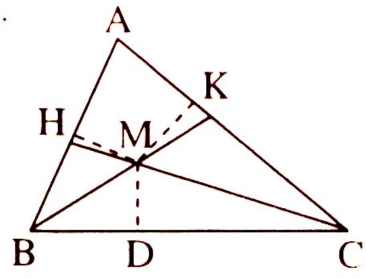
$\hat{B} = \hat{C}$, vì ΔABC cân tại A

suy ra

$\Delta AMB = \Delta AMC$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\Leftrightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

Bài 3: Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc B và C. Ta cần đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\hat{A}$.



Thật vậy, kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$

Ta có:

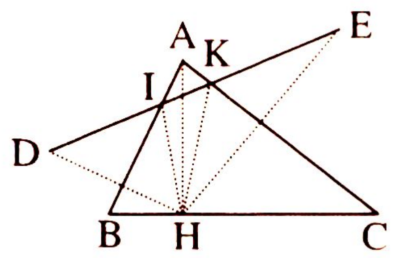
MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác góc C.

suy ra:

MH = MK $\Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

Bài 4:



a. Vì ΔHID cân tại I nên IB là tia phân giác của góc $\widehat{HID}$.

b. Vì ΔHKE cân tại K nên KC là tia phân giác của góc $\widehat{HKE}$.

c. Trong ΔIHK, nhận xét rằng:

- Theo kết quả câu a) suy ra IA là phân giác ngoài của góc I.
- Theo kết quả câu b) suy ra KA là phân giác ngoài của góc K.

Từ đó, suy ra HA là tia phân giác của góc $\widehat{IHK}$.

d. Trong ΔIHK, nhận xét rằng:

- Theo kết quả câu b) ta có KC là phân giác ngoài của góc K.
- Theo kết quả câu c) ta có HA là tia phân giác của góc H.

Mặt khác:

$HA \perp HC \Rightarrow$ HC là phân giác ngoài của góc H.

Từ đó, suy ra IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$.

Trong ΔIHD, nhận xét rằng:

- IB là tia phân giác của góc I.
- IC là tia phân giác của góc I.

Từ đó, suy ra:

$IC \perp IB \Leftrightarrow IC \perp AB$.

KB là tia phân giác của góc $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC.

e. Chứng minh tương tự như câu d) - *Đề nghị học sinh tự làm.*

CHỦ ĐỀ 6

TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- Trong ΔABC, tia phân giác của góc Â cắt cạnh BC tại điểm M, khi đó đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của ΔABC. Đôi khi, ta cũng gọi đường thẳng AM là đường phân giác của ΔABC.
- Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

☛ ***Chú ý***: Chúng ta đã có được các kết quả: "*Trong tam giác cân đường phân giác xuất phát từ đỉnh thì cũng là đường cao, đường trung tuyến, đường trung trực của cạnh đáy*".

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

☛ ***Nhận xét***: Từ kết quả trên ta suy ra được:

- Để tìm điểm I trong ΔABC cách đều ba cạnh của tam giác, ta chỉ cần dựng hai tia phân giác của hai góc và khi đó giao điểm I của chúng là điểm cần tìm.
- Nếu hai đường phân giác góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại I thì AI chính là tia phân giác của góc Â.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng ba đường phân giác của tam giác cùng đi qua một điểm.*

✍ *Giải*

Xét ΔABC, gọi I là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc B và C. Ta cần đi chứng minh I thuộc tia phân giác của góc Â.

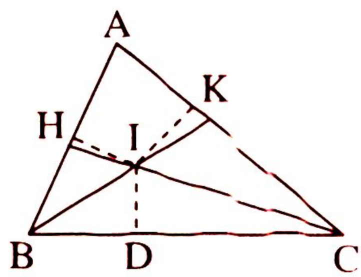
Thật vậy, kẻ IH ⊥ AB, ID ⊥ BC, IK ⊥ AC, suy ra:

IH = ID, vì I thuộc tia phân giác góc B.

IK = ID, vì I thuộc tia phân giác góc C.

suy ra:

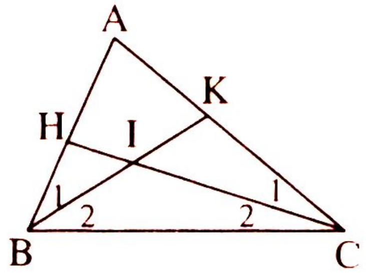
IH = IK ⇔ I thuộc là tia phân giác của góc Â.



Tức là, ba đường phân giác của ΔABC cùng đi qua điểm I và ta có thêm IH = IK = ID, nghĩa là điểm I cách đều ba cạnh của ΔABC.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho ΔABC, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính số đo của góc $\hat{A}$, biết $\widehat{BIC} = 125^0$.*



Giải

Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}, \quad \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

Trong ΔIBC, ta có:

$$\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^0 - \widehat{BIC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 125^0 = 55^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 110^0.$$

Trong ΔABC, ta có:

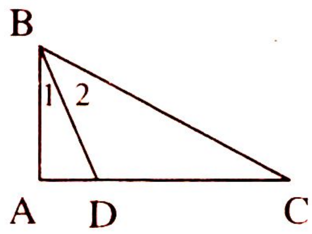
$$\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 110^0 = 70^0.$$

Vậy, ta có $\hat{A} = 70^0$.

Ví dụ 2: *Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 3cm, $\hat{B} = 60^0$. Tính độ dài đường phân giác BD.*

Giải

Đặt BD = x.



Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$\hat{B}_1 = 30^0, \text{ vì } \hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Vậy, độ dài phân giác $BD = 2\sqrt{3}$ cm.

Ví dụ 3: *Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I.*

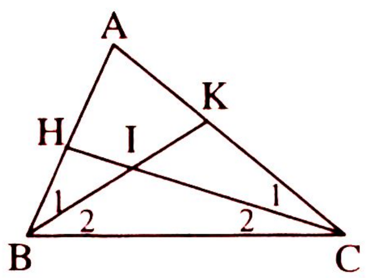
a. *Nối IA, tính số đo góc $\widehat{BAI}$.*

b. *Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.*

Giải

a. Ta thấy ngay IA là phân giác của góc $\hat{A}$ nên:

$$B\hat{A}I = \frac{1}{2}\hat{A} = 40^0.$$



Vậy, ta có $\widehat{BAI} = 40^0$.

b. Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Vì BK, CH là các đường phân giác nên $\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$.

Trong ΔIBC, ta có:

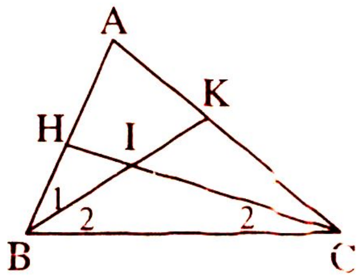
$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\hat{B}_2 + \hat{C}_2) = 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C})$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{1}{2}.100^0 = 130^0.$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC} = 130^0$.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC, *các đường phân giác* BK, CH *cắt nhau tại* I *Chứng minh rằng* $\widehat{BIC}$ *là góc tù.*

✍ *Giải*



Trong ΔABC, ta có $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A}$.

Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}, \quad \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

Trong ΔIBC, ta có:

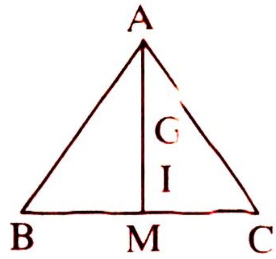
$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\hat{B}_2 + \hat{C}_2) = 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C})$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} > 90^0.$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC}$ là góc tù.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Gọi* G *là trọng tâm của tam giác, gọi* I *là giao điểm các đường phân giác của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm* A, G, I *thẳng hàng.*

✍ *Giải*



Ta có ngay:

- G thuộc trung tuyến AM.
- ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường phân giác, do đó I thuộc AM.

Vậy, ba điểm A, G, I thẳng hàng.

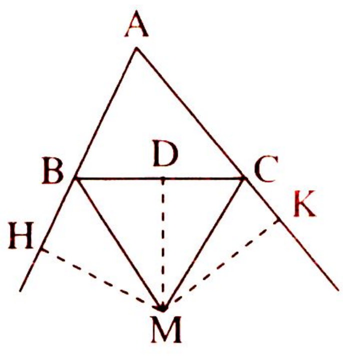
☞ ***Nhận xét***: Nếu ΔABC là tam giác đều thì ba đường trung tuyến chính là ba đường phân giác, do đó trọng tâm G cách đều ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC. *Hai đường phân giác của hai góc* B *và* C *cắt nhau tại* I. *Hai đường phân giác của hai góc ngoài tại* B *và* C *cắt nhau tại* M. *Chứng minh rằng* A, I, M *thẳng hàng.*

Giải

Từ giả thiết, hai đường phân giác của hai góc B và C cắt nhau tại I suy ra AI là tia phân giác của góc A.

Ta đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\hat{A}$.



Thật vậy, kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$, suy ra:

MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác gốc ngoài tại C.

suy ra:

$MH = MK \Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

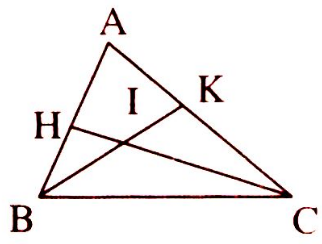
Vậy, ba điểm, A, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC. *Hãy tìm điểm sao cho:*

a. *Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng* AB, BC, AC *bằng nhau.*

b. *Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng* AB, BC, AC *bằng nhau và khoảng cách này là ngắn nhất.*

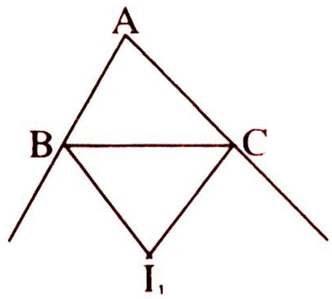
Giải



a. Điểm I thoả mãn điều kiện đầu bài, có thể là:

Trường hợp 1: Điểm I là giao điểm ba đường phân giác của ΔABC, khi đó theo tính chất thì khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau.

Trường hợp 2: Dựa trên kết quả đã được chứng minh " *Cho* ΔABC. *Hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc* $\hat{A}$ *cùng đi qua một điểm* ", khi đó ta nhận được điểm I_1.



Trường hợp 3: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_2 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại C và A.

Trường hợp 4: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_3 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại A và B.

Vậy, ta tìm được 4 điểm I, I_1, I_2, I_3 cách đều các đường thẳng AB, BC, AC.

b. Khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau và khoảng cách này là ngắn nhất.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I.

a. Tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

b. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.

c. Điểm I có cách đều ba cạnh của ΔABC không ? Vì sao ?

Bài 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 2(\hat{B} + \hat{C})$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

a. $\hat{A} = \alpha$.

b. $\hat{A} = 2(\hat{B} + \hat{C})$.

Bài 3: Cho ΔABC, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính số đo của góc $\hat{A}$, biết:

a. $\widehat{BIC} = 121^0$.

b. $\widehat{BIC} = \alpha$, với $\alpha > 90^0$.

Bài 4: Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài đường phân giác BD, biết:

a. $AB = 6cm$, $\hat{B} = 60^0$.

b. $AB = 9cm$, $\hat{C} = 30^0$.

c. $AB = 3cm$, $AC = 3\sqrt{3}$.

Bài 5: Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là trung điểm BC. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh rằng ME = MF.

Bài 6: Cho ΔABC cân tại A. Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng AI đi qua trung điểm của BC.

Bài 7: Cho ΔABC có $\hat{A} = 120^0$. Các đường phân giác AD, BE, CF.

a. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.

b. Tính số đo của góc $\widehat{EDF}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\widehat{BAI} = 30^0$. b. $\widehat{BIC} = 120^0$.

c. Điểm I có cách đều ba cạnh của ΔABC vì nó là giao điểm của ba đường phân giác.

Bài tập 2.

a. *Học sinh tự làm.*

b. Xét ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 2(\hat{B} + \hat{C}) + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 3(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 60^0$$

Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B},\ \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

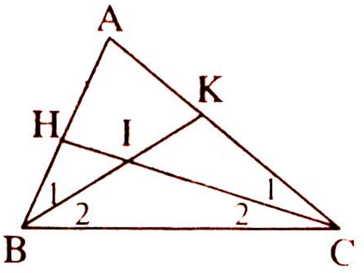
Trong ΔIBC, ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\hat{B}_2 + \hat{C}_2) = 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C})$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{1}{2}.60^0 = 150^0.$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC} = 150^0$.

Bài tập 3.



a. $\hat{A} = 62^0$.

b. Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B},\quad \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

Trong ΔIBC, ta có:

$$\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^0 - \widehat{BIC}$$

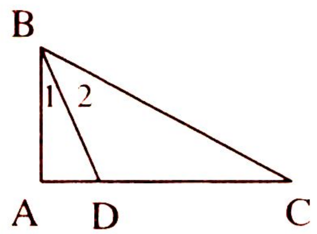
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \alpha \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^0 - 2\alpha.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 360^0 + 2\alpha = 2\alpha - 180^0.$$

Vậy, ta có $\hat{A} = 2\alpha - 180^0$.

Bài tập 4. Đặt BD = x.



a. Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$\hat{B}_1 = 30^0,\ \text{vì}\ \hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 144 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 144 \Leftrightarrow x^2 = 48 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

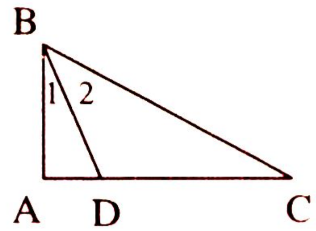
Vậy, độ dài phân giác BD = $4\sqrt{3}$ cm.

b. Học sinh tự làm tương tự câu a) với nhận xét $\hat{B} = 90^0 - \hat{C} = 60^0$.

c. Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 27 = 36 \Leftrightarrow BC = 6 = 2AB \Leftrightarrow \hat{B} = 60^0.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:



$$\hat{B}_1 = 30^0,\ \text{vì}\ \hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Vậy, độ dài phân giác BD = $2\sqrt{3}$.

Bài tập 5. Vì ΔABC cân tại A nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là phân giác của góc $\hat{A}$, suy ra điểm M cách đều hai cạnh AB và AC, tức là ME = MF.

Bài tập 6. Nhận xét rằng:

- Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I nên AI là tia phân giác góc $\hat{A}$.
- ΔABC cân tại A nên AI cũng là đường trung tuyến, do đó tia AI đi qua trung điểm của BC.

CHỦ ĐỀ 7

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CÁC ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

***Định lí thuận**: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.*

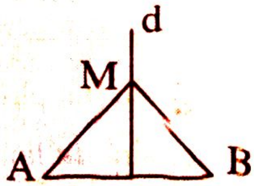
Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì

$$M \in d \Rightarrow MA = MB.$$

☛ ***Nhận xét**:* Từ kết quả của định lí trên gợi ý cho chúng ta giải bài toán "*Tìm điểm M thuộc hình (H) cách đều hai điểm A và B cho trước*", bởi khi đó M chính là giao điểm của (H) với đường trung trực của đoạn thẳng AB.

2. ĐỊNH LÍ ĐẢO

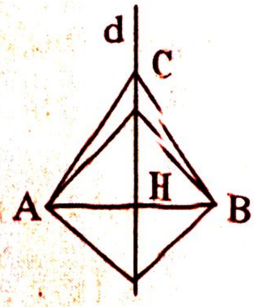
***Định lí đảo**: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.*



Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì $M \in d \Leftrightarrow MA = MB$.

Từ hai định lí trên ta có:

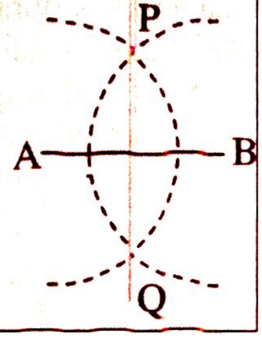
" Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó ".



☛ ***Nhận xét**:* Như vậy, với AB cho trước thì tập hợp các điểm C sao cho ΔABC cân tại C là đường trung trực của đoạn thẳng AB, trừ trung điểm M của AB.

3. CÁCH DỰNG ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Để dựng đường trung trực d của đoạn thẳng AB cho trước bằng thước và compa, ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Lấy điểm A làm tâm vẽ cung tròn có bán kính $R > \frac{1}{2}AB$.

Lấy điểm B làm tâm vẽ cung tròn có bán kính R. Hai cung tròn này cắt nhau tại P và Q.

Bước 2: Dùng thước vẽ đường thẳng PQ, đó là đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

☞ *Chú ý*:

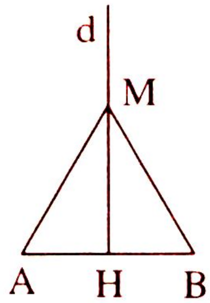
- Khi vẽ hai cung tròn trên, ta phải lấy bán kính $R > \frac{1}{2}AB$ thì hai cung tròn đó mới có hai điểm chung.
- Giao điểm của đường thẳng PQ với đoạn thẳng AB là trung điểm của đoạn thẳng AB, do đó cách dựng trên cũng là cách dựng trung điểm của đoạn thẳng bằng thước và compa.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Ví dụ 1: *Cho đoạn thẳng* AB. *Trên đường trung trực* d *của* AB *lấy điểm* M *bất kì. Chứng minh rằng* MA = MB.

✍ *Giải*



Gọi H là trung điểm AB.

Xét hai tam giác vuông ΔAMH và ΔBMH, ta có:

MH chung

AH = BH, vì H là trung điểm AB

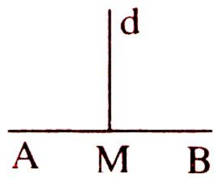
do đó:

ΔAMH = ΔBMH (hai cạnh góc vuông) ⇒ MA = MB, đpcm.

Ví dụ 2: *Cho* MA = MB. *Chứng tỏ rằng* M *thuộc đường trung trực của* AB.

✍ *Giải*

Xét hai trường hợp:



Trường hợp 1: Nếu $M \in AB$ thì vì

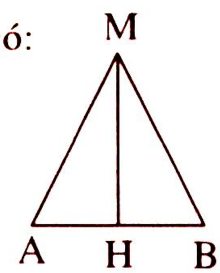
$MA = MB \Rightarrow$ M là trung điểm của AB

⇒ M thuộc đường trung trực của AB.

Trường hợp 2: Nếu $M \notin AB$

Kẻ $MH \perp AB$, ta phải đi chứng minh HA = HB.

Thật vậy, xét hai tam giác vuông ΔAMH và ΔBMH, ta có:



MH chung

AM = BM, giả thiết

do đó:

ΔAMH = ΔBMH (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

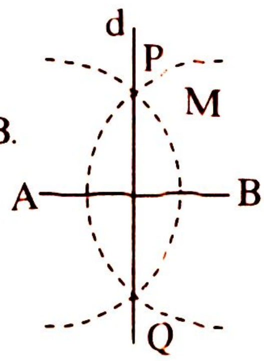
⇒ HA = HB, đpcm.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC. *Tìm điểm* D *sao cho* D *cách đều hai cạnh của góc* B *và* D *cách đều hai điểm* A *và* C.

✍ *Giải*

Ta thấy ngay, điểm D phải tìm là giao điểm của tia phân giác góc B với đường trung trực của AC.



Ví dụ 2: *Cho hình vẽ:*

a. *Chứng minh rằng* PQ *là đường trung trực của* AB.

b. *Chứng minh rằng* MA > MB.

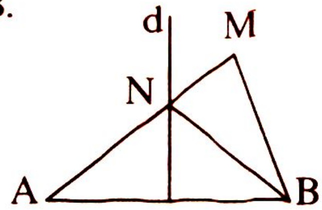
✍ *Giải*

a. Từ hình vẽ, ta có ngay:

PA = PB = R ⇒ P thuộc đường trung trực của AB.

QA = QB = R ⇒ Q thuộc đường trung trực của AB.

Vậy, PQ là đường trung trực của AB.



b. Gọi N là giao điểm của AM với d, suy ra NA = NB.

Trong ΔBMN, ta có:

MB < MN + NB = MN + NA = AM, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

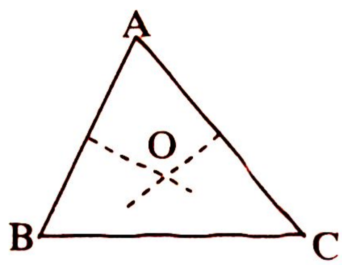
Cách 1: Chứng minh d đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB.

Cách 2: Lấy hai điểm P, Q trên d. Ta đi chứng minh PA = PB và QA = QB.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC. *Hai đường trung trực của* AB *và* AC *cắt nhau tại* O. *Chứng minh rằng* O *thuộc đường trung trực của* BC.

✍ *Giải*

Ta cần đi chứng minh OB = OC.



Thật vậy, ta có:

OA = OB, vì O thuộc đường trung trực của AB.

OA = OC, vì O thuộc đường trung trực của AC.

suy ra:

OB = OC ⇔ O thuộc đường trung trực của BC.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện ví dụ trên chúng đã sử dụng cả định lí thuận và định lí đảo.

Ví dụ 3: *Cho góc* $\widehat{xOy} = 80^0$, *điểm* A *nằm trong góc* $\widehat{xOy}$. *Vẽ điểm* B *sao cho* Ox *là đường trung trực của* AB. *Vẽ điểm* C *sao cho* Oy *là đường trung trực của* AC.

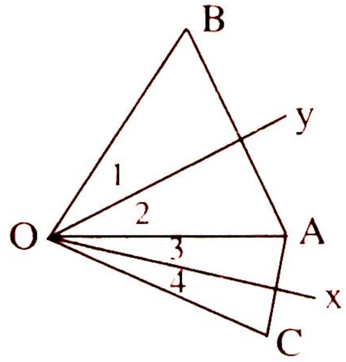
a. *Chứng minh rằng* O *thuộc đường trung trực của* BC.

b. *Tính số đo góc* $\widehat{BOC}$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

- OA = OB, vì Ox là đường trung trực của AB
- OA = OC, vì Oy là đường trung trực của AC



do đó:

OB = OC ⇒ O thuộc đường trung trực của BC.

b. Nhận xét rằng:

- ΔOAB cân tại O nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.
- ΔOAC cân tại O nên $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Khi đó:

$$\widehat{BOC} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\widehat{xOy} = 2.80^0 = 160^0.$$

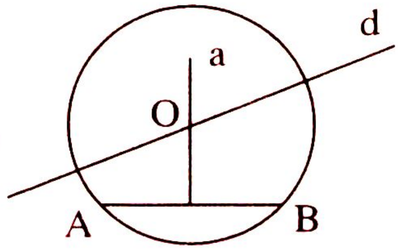
Vậy, ta được $\widehat{BOC} = 160^0$.

Ví dụ 4: *Cho hai điểm* A, B *và đường thẳng* d *sao cho* AB *không vuông góc với* d. *Vẽ đường tròn có tâm* O *thuộc* d *và đi qua hai điểm* A, B.

✍ *Giải*

Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đường trung trực a của đoạn thẳng AB.
- Vì AB không vuông góc với d nên a cắt đường thẳng d tại O.
- Vẽ đường tròn có tâm O bán kính OA.



Ví dụ 5: *Cho ba tam giác cân* ΔDBC, ΔEBC, ΔFBC *chung đáy* BC. *Chứng minh rằng ba điểm* D, E, F *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

Gọi d là đường trung trực của BC, ta lần lượt nhận xét:

- ΔDBC cân tại D nên:

  DB = DC ⇒ D ∈ d.
- ΔEBC cân tại E nên:

  EB = EC ⇒ E ∈ d.
- ΔFBC cân tại F nên:

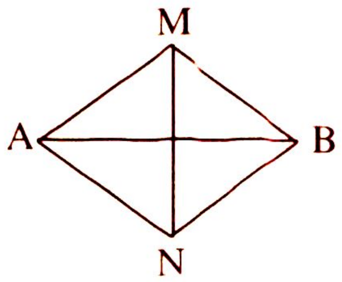
  FB = FC ⇒ F ∈ d.

Vậy, ba điểm D, E, F cùng thuộc đường thẳng d nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 6: *Cho hai điểm* M, N *nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng* AB. *Chứng minh rằng* $\Delta AMN = \Delta BMN$.

✍ *Giải*

Xét hai tam giác ΔAMN và ΔBMN, ta có:



MN chung

MA = MB, vì M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

NA = NB, vì N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

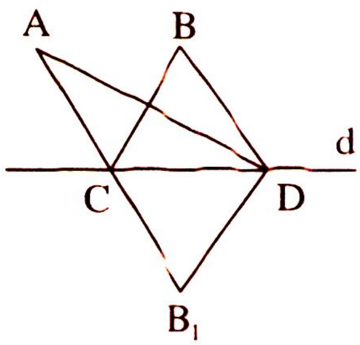
do đó $\Delta AMN = \Delta BMN$ (c.c.c).

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đã được làm quen với dạng toán "*Cho hai điểm* A, B *ở về cùng một phía với đường thẳng* d. *Tìm điểm* C *trên* d *sao cho* CA + CB *nhỏ nhất*", tuy nhiên khi đã có thêm kiến thức về tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng chúng ta có thể trình bày lời giải của bài toán này một cách đơn giản hơn. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 7: *Cho đường thẳng* d *và hai điểm* A, B *nằm về một phía của đường thẳng* d. *Tìm trên đường thẳng* d *điểm* C *sao cho* CA + CB *nhỏ nhất*.

✍ *Giải*

Vẽ điểm B_1 sao cho d là trung trực của BB_1.



Gọi C là giao điểm của AB_1 và d và D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta có ngay:

$CB = CB_1$.

$DB = DB_1$.

Trong ΔAB_1D, ta luôn có:

$AB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1$

$\Leftrightarrow CA + CB < DA + DB$.

Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC. Tìm điểm O sao cho:

a. O thuộc trung tuyến AM và cách đều hai đỉnh A, B.

b. O cách đều các đỉnh A, B, C.

c. O cách đều các đỉnh A, C và cách đều các cạnh của góc $\hat{A}$.

Bài 2: Cho góc $\widehat{xOy} = 60^0$, điểm A nằm trong góc xÔy. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Bài 3: Cho góc $\widehat{xOy} = 120^0$, điểm A nằm trong góc xÔy sao cho $\widehat{xOA}$, $\widehat{yOA} < 90^0$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Bài 4: Cho góc $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC. Tính số đo của góc $\widehat{xOy}$, biết $\widehat{BOC} = 110^0$.

Bài 5: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo của các góc đỉnh O.

Bài 6: Cho ΔABC. Tìm trên đường phân giác ngoài góc Â điểm M sao cho MB + MC nhỏ nhất.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

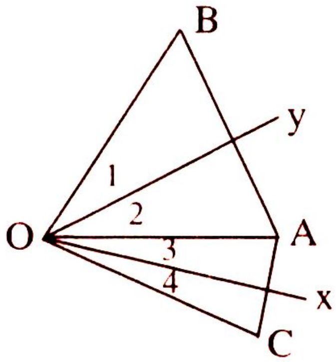
Bài 1:

a. O là giao điểm của trung tuyến AM với đường trung trực của AB.

b. O là giao điểm của hai đường trung trực của AB và AC.

c. O là giao điểm của phân giác góc Â với đường trung trực của AC.

Bài 2:



a. Nhận xét rằng:

- OA = OB, vì Ox là đường trung trực của AB
- OA = OC, vì Oy là đường trung trực của AC

do đó OB = OC.

b. Nhận xét rằng:

- ΔOAB cân tại O nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.
- ΔOAC cân tại O nên $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Khi đó:

$$B\hat{O}C = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$$
$$= \widehat{2xOy} = 2.60^0 = 120^0.$$

Vậy, ta được $\widehat{BOC} = 120^0$.

Bài 3: *Tham khảo bài tập 2 với chú ý góc xÔy là góc tù.*

Bài 4: $\widehat{xOy} = 55^0$.

Bài 5: *Sử dụng tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc.*

CHỦ ĐỀ 8 **TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC**

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- Trong một tam giác đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

☞ ***Chú ý***:

- Trong một tam giác bất kì, đường trung trực của một cạnh không nhất thiết đi qua đỉnh đối diện của cạnh ấy. Tuy nhiên, trong tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy luôn đi qua đỉnh đối diện với cạnh đó.
- Chúng ta đã có được các kết quả "*Trong tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác của cạnh đáy*".

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

☞ ***Nhận xét***: Từ kết quả trên ta suy ra được:

- Để tìm điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác ΔABC, ta chỉ cần dựng hai đường trung trực của hai cạnh và khi đó giao điểm O của chúng là điểm cần tìm.
- Nếu hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O thì OM (với M là trung điểm của BC) chính là đường trung trực của BC.
- Và, ta gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

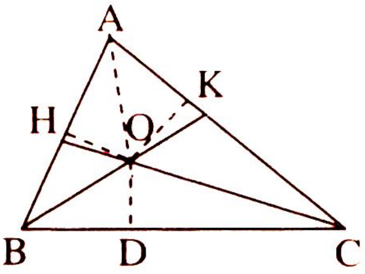
Vấn đề 1: **CHỨNG MINH TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC**

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm.*

✍ *Giải*

Xét ΔABC, gọi O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC. Ta cần đi chứng minh O thuộc đường trung trực cạnh BC.

Thật vậy, ta có ngay:



OA = OB, vì O thuộc trung trực của AB.

OA = OC, vì O thuộc trung trực của AC.

suy ra:

OB = OC ⇒ O thuộc trung trực của BC.

Tức là, ba đường trung trực của ΔABC cùng đi qua điểm O và ta có thêm OA = OB = OC, nghĩa là điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực, trọng tâm G và điểm A thẳng hàng.*

✍ *Giải*

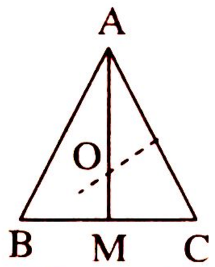
Từ giả thiết, suy ra giao điểm của ba đường trung trực thuộc AG nên AG là đường trung trực của BC, suy ra ΔABC cân tại A.

☞ ***Nhận xét***: Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường phân giác, giao điểm của ba đường trung tuyến, , giao điểm của ba đường trung trực trùng nhau.

Ví dụ 2: *Cho ΔABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AC cắt AM tại O. Chứng minh rằng OA = OB.*

✍ *Giải*

Vì ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng chính là đường trung trực của BC, do đó:



OB = OC. (1)

Vì O thuộc đường trung trực của AC nên:

OA = OC. (2)

Từ (1), (2) suy ra OA = OB.

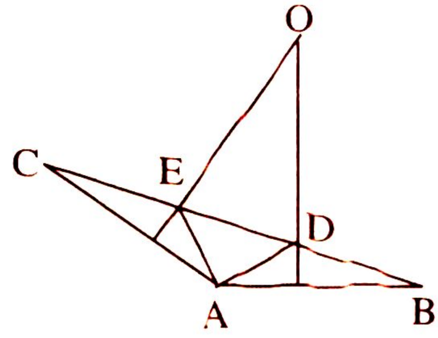
Ví dụ 2: *Cho ΔABC có* $\hat{A} > 90^0$. *Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự tại D, E.*

a. *Các ΔABD, ΔACE là tam giác gì ?*

b. *Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua những điểm nào trong hình vẽ.*

Giải

a. Nhận xét rằng:



- Vì D thuộc đường trung trực của AB nên:

  DA = DB ⇔ ΔABD cân tại D.
- Vì E thuộc đường trung trực của AC nên:

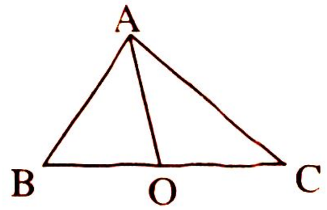
  EA = EC ⇔ ΔACE cân tại E.

b. Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua các điểm B và C, do đó nó là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.*

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, để thực hiện bài toán chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



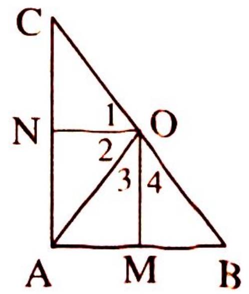
Cách 1: Gọi O là trung điểm của BC, ta có:

- O thuộc đường trung trực của BC.
- $OA = \frac{1}{2}BC$ suy ra:

  OA = OB ⇒ O thuộc đường trung trực của AB.

Vậy, các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.

Cách 2: Gọi M là trung điểm của AB, giả sử đường trung trực của AB cắt BC tại O. Ta cần đi chứng minh O thuộc đường trung trực của AC.



Xét hai tam giác vuông ΔOMA và ΔOMB, có:

OM chung

MA = MB

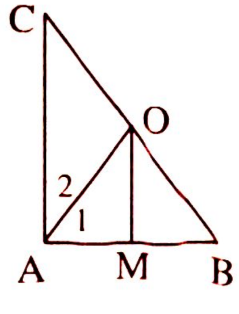
do đó:

ΔOMA = ΔOMB (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \Leftrightarrow$ ΔOAC cân tại O

⇔ OA = OC ⇒ O thuộc đường trung trực của AC.

Cách 3: Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, giả sử hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Ta cần đi chứng minh O thuộc BC.



Ta có ngay:

$\widehat{MON} = \hat{A} = 90^0$.

Vì O thuộc đường trung trực của AC nên:

OA = OC ⇔ ΔOAC cân tại O $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Vì O thuộc đường trung trực của AB nên:

OA = OB ⇔ ΔOAB cân tại O $\Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Khi đó:

$\widehat{BOC} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$

$= 2\widehat{MON} = 2.90^0 = 180^0$

$\Leftrightarrow$ B, O, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ O $\in$ BC, đpcm.

Ví dụ 3: *Vẽ đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *trong các trường hợp:*

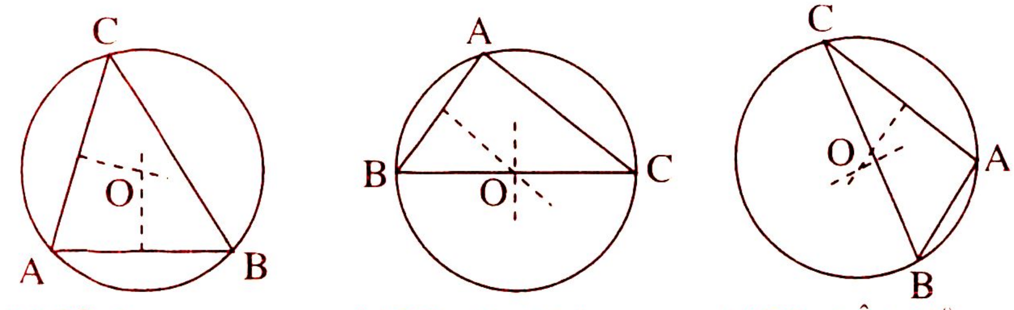
a. ΔABC *nhọn.*

b. ΔABC *vuông tại* A.

c. ΔABC *có* $\hat{A} > 90^0$.

Giải

Ta có được các hình vẽ sau:



ΔABC nhọn ΔABC vuông tại A ΔABC có $\hat{A} > 90^0$

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta có được nhận xét:

- Nếu ΔABC nhọn thì tâm O ở bên trong ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm O là trung điểm BC.
- Nếu ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì tâm O ở bên ngoài ΔABC.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *cân tại* A, *có* $\hat{B} = 36^0$. *Gọi* O *là giao điểm của ba đường trung trực,* I *là giao điểm của ba đường phân giác. Chứng minh rằng* BC *là đường trung trực của* OI.

Giải

Ta có ngay:

BC ⊥ OI.

$\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - (36^0 + 36^0) = 108^0 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 54^0$.

Mặt khác, ta có:

OA = OB $\Leftrightarrow$ ΔOAB cân tại O $\Leftrightarrow$ $\widehat{OBA} = \hat{A}_1 = 54^0$.

$\hat{B}_1 = \widehat{OBA} - \hat{B} = 54^0 - 36^0 = 18^0$.

Xét hai tam giác vuông ΔMBO và ΔMBI có:

BM chung

$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B} = 18^0 = \hat{B}_1$

do đó $\Delta MBO = \Delta MBI$ (cạnh góc vuông – góc nhọn), suy ra:

$$MO = MI$$

Vậy, BC là đường trung trực của OI.

☛ ***Chú ý***:

1. Để tránh được sai sót khi vẽ hình, các em học sinh cần nhớ với ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì O ở ngoài ΔABC.
2. Các em học sinh hãy trình bày lại lời giải trên dựa trên tính chất đường trung trực.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC. Tìm một điểm O cách đều ba điểm A, B, C. Có bao nhiêu điểm như vậy.

Bài 2: Chứng minh rằng điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 4: Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 5: Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực, giao điểm của ba đường phân giác và điểm A thẳng hàng.

Bài 6: Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực và giao điểm của ba đường phân giác trùng nhau.

Bài 7: Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực và giao điểm của ba đường trung tuyến trùng nhau.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

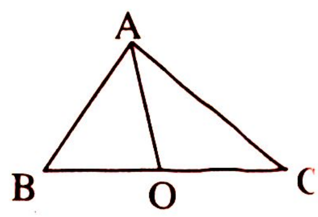
Bài 1: O là giao điểm của đường trung trực cạnh AB và đường trung trực cạnh AC. Có duy nhất một điểm O thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 2: Xét ΔABC vuông tại A, gọi O là trung điểm của BC.

Vì AO là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$OA = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow OA = OB = OC$$

$\Leftrightarrow$ O cách đều ba đỉnh A, B, C.



Bài 3: Sử dụng tính chất đường trung trực.

Bài 4: Sử dụng tính chất đường trung trực.

Bài 5: Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác, suy ra giao điểm của ba đường trung trực thuộc AI nên AI là đường trung trực của BC, suy ra ΔABC cân tại A.

Bài 6: ΔABC đều.

Bài 7: ΔABC đều.

CHỦ ĐỀ 9 # TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có ba đường cao.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đã có được kết quả *"Trong tam giác cân đường cao thuộc cạnh đáy thì cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực"*.

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

☞ ***Nhận xét***:

- Để xác định trực tâm H của ΔABC ta kẻ hai đường cao, và khi đó giao điểm của chúng là trực tâm H.
- Nếu H là trực tâm ΔABC thì các tia AH, BH, CH sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

3. VỀ CÁC ĐƯỜNG CAO, TRUNG TUYẾN, TRUNG TRỰC, PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC CÂN

Từ các kiến thức đã thu nhận được trong các chủ đề trước, chúng ta có được tính chất của tam giác cân như sau:

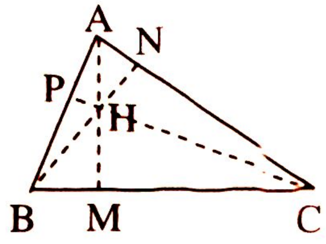
1. Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.
2. Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

Từ đó suy ra được tính chất cho tam giác đều là *"Trong một tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau"*.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC, *trực tâm* H. *Tìm trực tâm của các tam giác* ΔABH, ΔACH, ΔBCH.

Giải

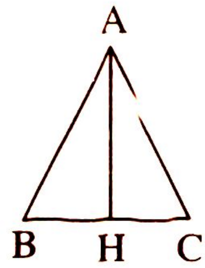


Ta nhận thấy ngay:

- ΔABH nhận C làm trực tâm.
- ΔACH nhận B làm trực tâm.
- ΔBCH nhận A làm trực tâm.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* AB = AC = 13cm, BC = 10cm. *Tính độ dài đường cao* AH.

Giải



Với giả thiết:

$$AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A} \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BC = 5cm.$$

Trong tam giác vuông ΔABH, ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow AH = 12cm.$$

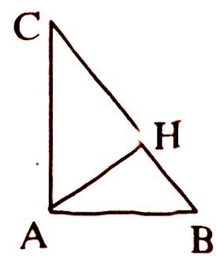
Vậy, độ dài đường cao AH = 12cm.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AH.

a. *Chứng minh rằng* A *là trực tâm của tam giác* ΔABC.

b. *Tìm trực tâm của các tam giác* ΔABH, ΔACH.

Giải



a. Vì ΔABC vuông tại A nên:

$AB \perp AC \Rightarrow AB$ là một đường cao.

$AC \perp AB \Rightarrow AC$ là một đường cao.

Hai đường cao AB, AC cắt nhau tại A, suy ra A là trực tâm của tam giác ΔABC.

b. Nhận xét rằng:

- ΔABH vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.
- ΔACH vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, ta có được nhận xét:

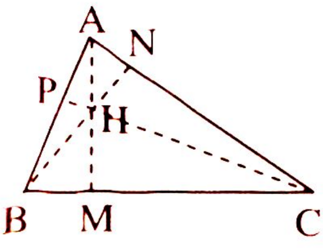
"*Nếu một tam giác có trực tâm trùng với một đỉnh thì tam giác đó là tam giác vuông*".

Ví dụ 4: *Vẽ trực tâm* ΔABC *trong các trường hợp*:

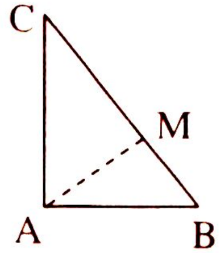
a. ΔABC *nhọn*. b. ΔABC *vuông tại* A. c. ΔABC *có* $\hat{A} > 90^0$.

✍ *Giải*

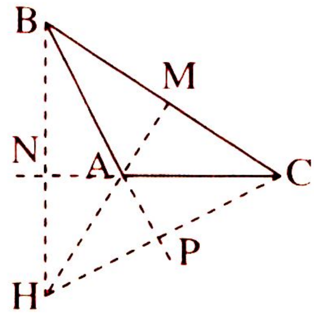
Ta có được các hình vẽ sau:



ΔABC nhọn



ΔABC vuông tại A



ΔABC có $\hat{A} > 90^0$

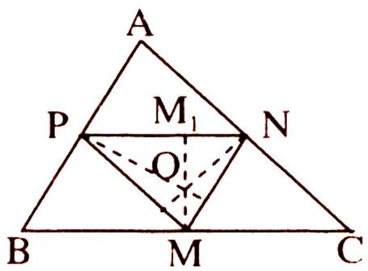
☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên, ta có được nhận xét:

- Nếu ΔABC nhọn thì trực tâm H ở bên trong ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì trực tâm $H \equiv A$.
- Nếu ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì trực tâm H ở bên ngoài ΔABC.

Ví dụ sau sẽ chứng minh nhận xét thứ hai và việc vận dụng nó để xác định trực tâm.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC, *gọi* M, N, P *theo thứ tự là trung điểm của* BC, AC, AB. *Chứng tỏ rằng các đường cao của* ΔMNP *là các đường trung trực của* ΔABC.

✍ *Giải*



- Với đường cao MM_1 của ΔMNP, ta có:

  $MM_1 \perp NP$

  Vì N, P theo thứ tự là trung điểm của AC, AB, suy ra:

  $NP \parallel BC \Rightarrow MM_1 \perp BC$

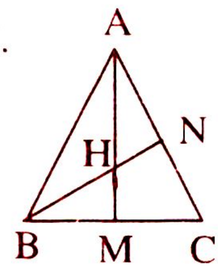
  Vậy, MM_1 là đường trung trực của ΔABC.
- Tương tự, ta cũng có NN_1, PP_1 là đường trung trực của ΔABC.

Vậy, các đường cao của ΔMNP là đường trung trực của ΔABC.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC *cân tại* A, *gọi* M *là trung điểm* BC. *Kẻ đường cao* BN (N ∈ AC) *cắt* AM *tại* H.

a. *Chứng minh rằng* $CH \perp AB$.

b. *Tính số đo các góc* $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$, *biết* $\hat{C} = 40^0$.



✍ *Giải*

a. Ta có nhận xét:

$AM \perp BC$, vì ΔABC cân tại A

suy ra H là trực tâm ΔABC, do đó $CH \perp AB$.

b. Trong ΔCBN vuông tại N, ta có:

$$\widehat{MBH} = 90^0 - \hat{C} = 90^0 - 40^0 = 50^0.$$

Trong ΔBHM vuông tại M, ta có:

$$\widehat{BHM} = 90^0 - \widehat{MBH} = 90^0 - 50^0 = 40^0$$

$$\Rightarrow \widehat{MHN} = 180^0 - \widehat{BHM} = 180^0 - 40^0 = 140^0.$$

Vậy, ta tìm được $\widehat{BHM} = 40^0$, $\widehat{MHN} = 140^0$.

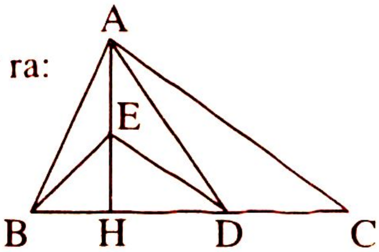
☞ ***Chú ý***: Chúng ta có thể suy ra ngay được số đo của các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$ bằng nhận xét về góc có cạnh tương ứng vuông góc, cụ thể:

$\widehat{BHM} = \hat{C} = 40^0$, vì là hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc.

$\widehat{BHM} = 180^0 - \hat{C} = 140^0$, vì là hai có cạnh tương ứng vuông góc và ở đó 1 góc nhọn và 1 góc tù.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AH. *Gọi* D, E *theo thứ tự là trung điểm của* HC, HA. *Chứng minh rằng* $BE \perp AD$.

✍ *Giải*



Vì D, E theo thứ tự là trung điểm của HC, HA, suy ra:

DE // AC

$AC \perp AB$

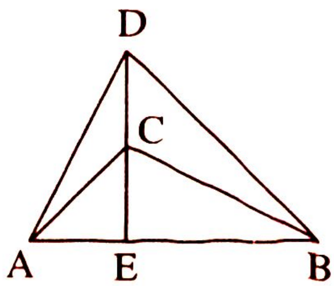
suy ra $DE \perp AB$.

Trong ΔABD, ta có:

$AH \perp BD$ và $DE \perp AB \Rightarrow$ E là trực tâm của $\Delta ABD \Rightarrow BE \perp AD$.

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC, *có* $\hat{A} = 45^0$ *và* $AC < BC$, *đường cao* CE. *Trên tia đối của tia* CE *lấy điểm* D *sao cho* EB = ED. *Chứng minh rằng* $BC \perp AD$.

✍ *Giải*



Xét ΔBDE vuông tại E, ta có:

$EB = ED \Leftrightarrow \Delta BDE$ cân $\Rightarrow \widehat{EBD} = 45^0$.

Suy ra:

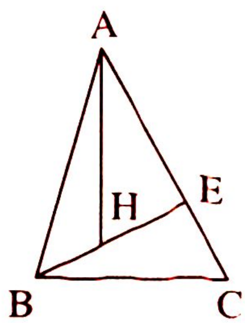
$\widehat{CAE} + \widehat{EBD} = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD$.

Trong ΔABD, ta có:

$AC \perp BD$ và $DE \perp AB \Rightarrow$ C là trực tâm $\Rightarrow BC \perp AD$, đpcm.

Ví dụ 9: *Cho* ΔABC, có $\hat{A} = 45^0$ *và trực tâm* H. *Chứng minh rằng* BC = AH.

✍ *Giải*



Giả sử BH cắt AC tại E.

Xét ΔABE vuông tại E, ta có:

$\hat{A} = 45^0 \Leftrightarrow \Delta ABE$ vuông cân $\Rightarrow AE = BE$.

Xét hai tam giác vuông ΔAEH và ΔBEC, ta có:

AE = BE

$\widehat{EAH} = \widehat{EBC}$, góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra:

$\Delta AEH = \Delta BEC$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

$\Rightarrow AH = BC$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC có AB = AC = 10cm, BC = 8cm. Tính độ dài đường cao AH.

Bài 2: Cho ΔABC có AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm. Tính độ dài đường cao AH.

Bài 3: Chứng tỏ rằng trực tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài tam giác.

Bài 4: Cho ΔABC cân tại A, trung tuyến AM. Kẻ đường thẳng d qua A và vuông góc với AM. Chứng minh rằng d song song với BC.

Bài 5: Lấy ba điểm I, J, K theo thứ tự đó trên đường thẳng d. Trên đường thẳng l vuông góc với d tại J, lấy điểm M. Đường thẳng qua I vuông góc với MK cắt l tại N. Chứng minh rằng $KN \perp IM$.

Bài 6: Cho ΔABC cân tại A, phân giác AM. Kẻ đường cao BN cắt AM tại H.

a. Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b. Tính số đo các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$, biết $\hat{C} = 39^0$.

Bài 7: Cho ΔABC cân tại A, gọi M là trung điểm BC. Kẻ đường cao BN ($N \in AC$) cắt AM tại H.

a. Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b. Tính số đo các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$, biết $\hat{C} = 50^0$.

Bài 8: Cho ΔABC có $\hat{B}, \hat{C}$ nhọn và AB < AC. Kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$.

Bài 9: Cho hai tam giác vuông ΔABC, ΔABD có chung cạnh huyền AB. Gọi H là giao điểm của AD và BC. Kẻ HK vuông góc với AB. Chứng minh rằng AC, BD, HK đồng quy.

Bài 10: Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AB = AD. Kẻ đường cao AM của ΔABC, đường cao AN của ΔACD. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 90^0$.

Bài 11: Cho ΔABC. Qua mỗi đỉnh A, B, C kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tại M, N, P.

a. Chứng minh rằng A là trung điểm của MP.

b. Chứng tỏ rằng các đường cao của ΔABC là các đường trung trực của ΔMNP.

Bài 12: Cho ΔABC, có $\hat{A} = 135^0$ và trực tâm H. Chứng minh rằng BC = AH.

Bài 13: Cho ΔABC, có trực tâm H và AH = BC. Tính số đo của góc $\hat{A}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

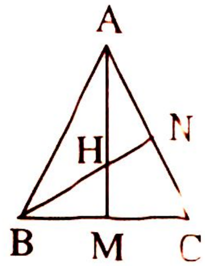
Bài 1: $AH = \sqrt{84}$ cm.

Bài 2: AH = 2,4cm.

Bài 3: Xét ΔABC có $\hat{A} > 90^0$. Khi đó, đường cao BN ở phía ngoài ΔABC do đó trực tâm H của tam giác nằm ở bên ngoài tam giác

Bài 4: Vì d và BC cùng vuông góc với AM nên d // BC.

Bài 5: Chứng tỏ rằng M là trọng tâm ΔNIK.



Bài 6:

a. Ta có nhận xét:

AM ⊥ BC, vì ΔABC cân tại A

suy ra H là trực tâm ΔABC, do đó CH ⊥ AB.

b. Ta có:

$\widehat{BHM} = \hat{C} = 39^0$, hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc.

$\widehat{MHN} = 180^0 - \hat{C} = 141^0$,

hai góc có cạnh tương ứng vuông góc và một góc nhọn, một góc tù.

Vậy, ta tìm được $\widehat{BHM} = 39^0$, $\widehat{MHN} = 141^0$.

Bài 7: $\widehat{BHM} = 50^0$, $\widehat{MHN} = 130^0$.

Bài 8: *Học sinh tự làm.*

Bài 9: *Học sinh tự vẽ hình.*

Gọi E là giao điểm của AC và BD.

Trong ΔAEB, ta có:

BC ⊥ AE ⇒ BC là đường cao; AD ⊥ BE ⇒ AD là đường cao

AD cắt BC tại H

suy ra H là trực tâm ΔAEB, do đó AC, BD, HK đồng quy tại E.

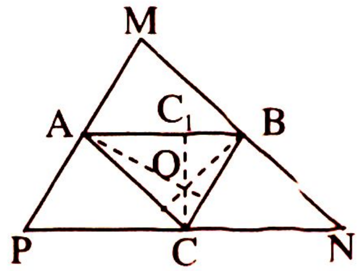
Bài 10: *Hướng dẫn- Học sinh tự vẽ hình.*

- Vì ΔABC cân tại A nên $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.
- Vì ΔACD cân tại A nên $\widehat{CAN} = \widehat{NAD}$.

Khi đó, vì:

$\widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{CAN} + \widehat{NAD} = 180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{MAC} + 2\widehat{CAN} = 180^0$

$\Leftrightarrow 2(\widehat{MAC} + \widehat{CAN}) = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{MAN} = 90^0$.



Bài 11:

a. Nhận xét rằng:

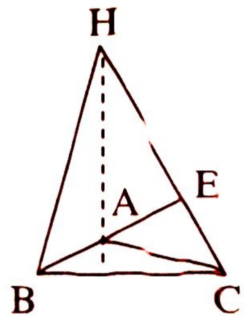
ΔABC = ΔBAM (g.c.g) ⇒ BC = AM.

ΔABC = ΔCPA (g.c.g) ⇒ BC = PA.

Suy ra:

AM = PA ⇔ A là trung điểm của MP.

b. Hiển nhiên.



Bài 12: Giả sử CH cắt AB tại E. Xét ΔACE vuông tại E, ta có:

$\widehat{CAE} = 180^0 - \widehat{BAC} = 180^0 - 135^0 = 45^0$

⇔ ΔACE vuông cân ⇒ AE = CE.

Xét hai tam giác vuông ΔAEH và ΔBEC, ta có:

AE = CE

$\widehat{EAH} = \widehat{EBC}$, góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra:

ΔAEH = ΔBEC (cạnh góc vuông - góc nhọn) ⇒ AH = BC.

Bài 13: $\hat{A} = 45^0$ hoặc $\hat{A} = 135^0$.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I. SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

CHƯƠNG II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

CHƯƠNG III. THỐNG KÊ

CHƯƠNG IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

CHƯƠNG II. TAM GIÁC

CHƯƠNG III. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC